Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 2.5

Аннотация

Приближенные вычисления и вычисления пределов с помощью формулы Тейлора. Монотонные функции. Экстремум функции.

1 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c, ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами. В результате получаем:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{a(x-c)^n+\circ((x-c)^n)}{b(x-c)^m+\circ((x-c)^m)}.$$

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x-c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

$$\lim_{x\to c}\frac{\circ((x-c)^\alpha)}{(x-c)^\beta}=0, \text{если } \alpha\geq\beta.$$

Пример:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=?$$
Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3), x\to 0,$$
$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\circ(x^3), x\to 0,$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^4), x\to 0.$$

Тогда
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\circ(x^3)-2x}{x-x+\frac{x^3}{3!}-\circ(x^4)}=$$
$$=\left|\begin{array}{l}\circ(x^n)-\circ(x^n)=\circ(x^n),\\ -\circ(x^n)=\circ(x^n).\end{array}\right|=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)}{\frac{x^3}{6}+\circ(x^4)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{\circ(x^4)}{x^3}}=\frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{1}{6}+0}=2.$$

2 Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n, а $r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c, тем точнее данная формула.

Пример:

$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \dfrac{x^3}{3!}, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.4997.$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.500003.$

3 Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале (a, b), если

$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Определение

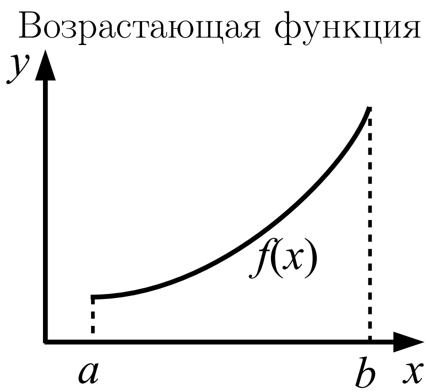
Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей (строго убывающей)** на интервале (a, b), если

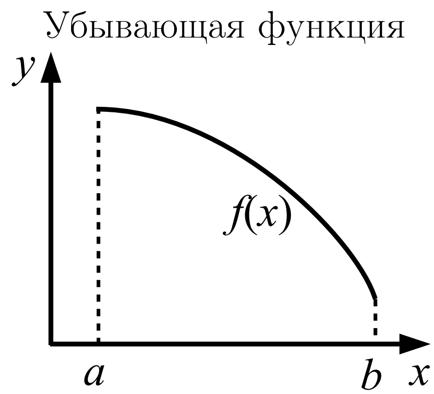
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2\colon f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2)).$$

Определение

Возрастающие и убывающие функции также называются **монотонными**.

Примеры:





Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$.

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производную $f'(x)$.

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2)$.

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, $f(x_2) \leq f(x_1)$ - $f(x)$ убывает.

■

4 Экстремум функции

Определение

Точка c называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю.

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю или не существует.

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если

$$\exists U(c)\ \forall x \in U(c)\colon f(x) \leq f(c)\ (f(x) \geq f(c)).$$

Определение

Точки локального максимума и минимума также называются **точками экстремума**.

Определение

Значение функции $f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называется **локальным максимумом (минимумом)** или **экстремумом функции**.

Ниже приведены примеры точек экстремума произвольной функции. Здесь x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума, x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума. Соответственно, y^1_{min}, y^2_{min} - локальные минимумы, y^1_{max}, y^2_{max} - локальные максимумы. Точки A, B, C, D - экстремальные точки графика функции.