

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление
функций одной переменной
Лекция 2.6

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Условия существования экстремума



Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)



Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.



Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум.



Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум. Если $f'(c)$ не существует, то в точке c функция имеет острый экстремум.



Условия существования экстремума

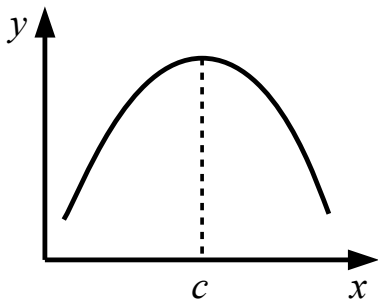
Примеры:



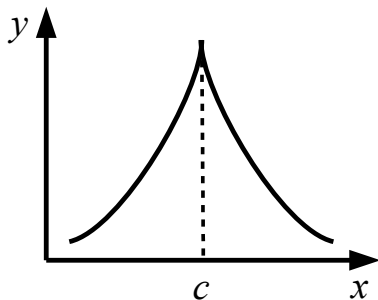
Условия существования экстремума

Примеры:

Гладкий экстремум



Острый экстремум



Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**



Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является непрерывной. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то точка c является точкой экстремума.



Условия существования экстремума

Доказательство



Условия существования экстремума

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$.



Условия существования экстремума

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$, где число ξ лежит на интервале с концами x и c .



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0$,



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0,$



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка локального максимума.



Условия существования экстремума

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка локального максимума.

Случай локального минимума
рассматривается аналогично. ■



Условия существования экстремума

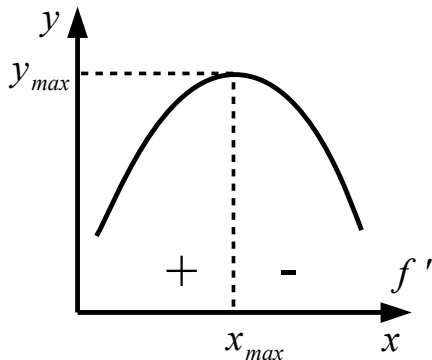
Примеры:



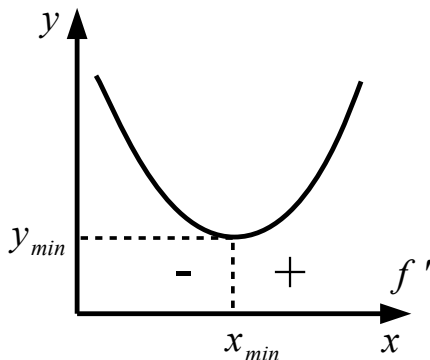
Условия существования экстремума

Примеры:

Локальный максимум



Локальный минимум



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Если $f''(c) < 0$, то c - точка локального максимума. Если $f''(c) > 0$, то c - точка локального минимума.



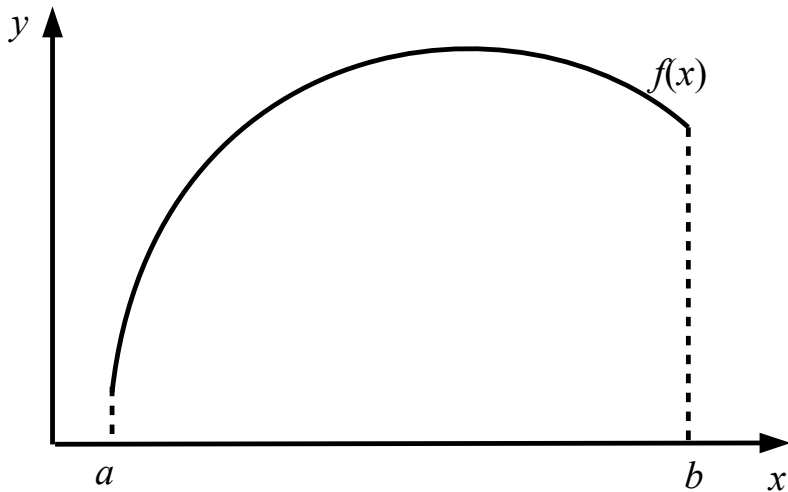
Выпуклость функции



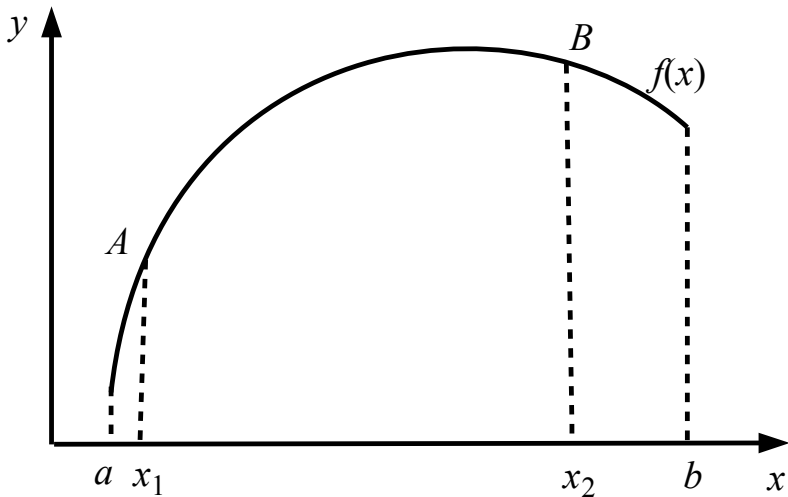
Выпуклость функции



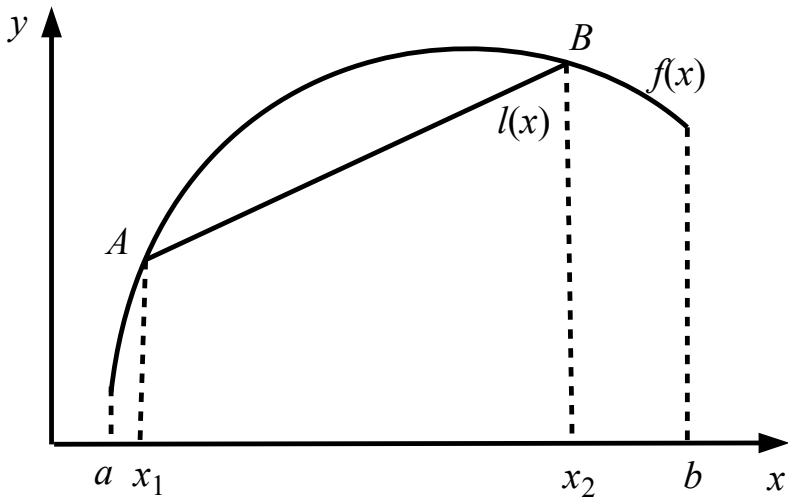
Выпуклость функции



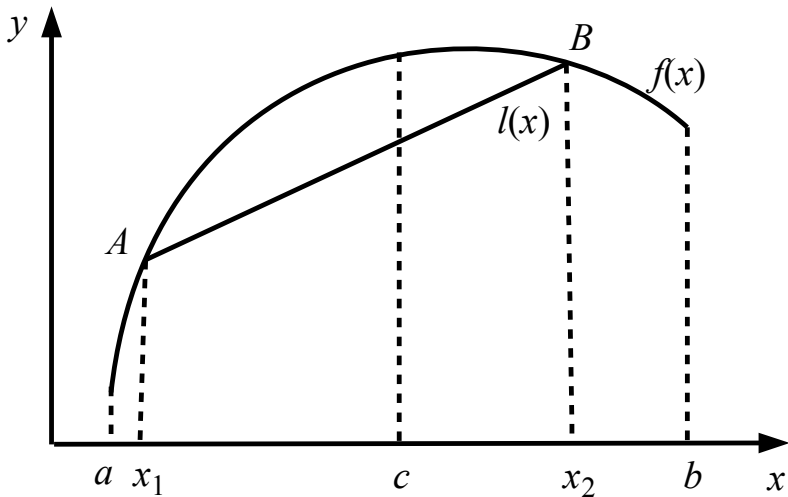
Выпуклость функции



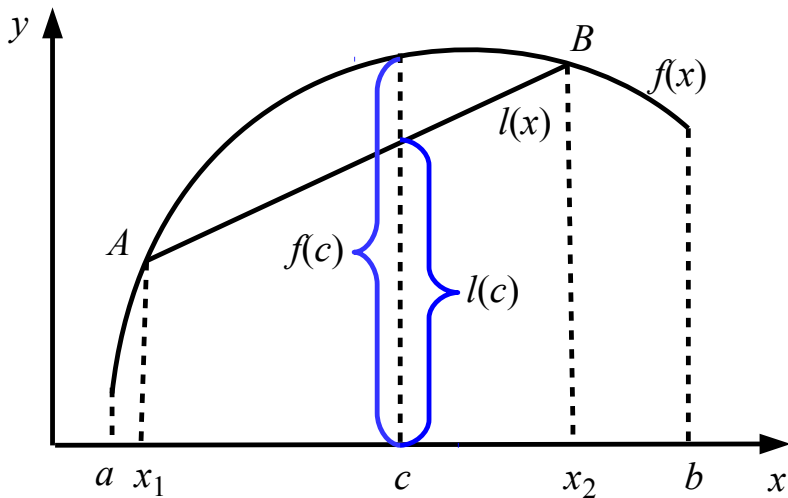
Выпуклость функции



Выпуклость функции



Выпуклость функции



Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) .



Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 .



Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 . Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением

$$y = l(x),$$



Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 . Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением

$$y = l(x),$$

где $x_1 \leq x \leq x_2$



Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 . Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением

$$y = l(x),$$

где $x_1 \leq x \leq x_2$ и

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



Выпуклость функции

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c .



Выпуклость функции

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке:



Выпуклость функции

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке: $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$,



Выпуклость функции

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке: $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ - расстояние от оси Ox до отрезка AB .



Выпуклость функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх (вниз)** на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и $\forall c \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $l(c) \leq f(c)$ ($l(c) \geq f(c)$).



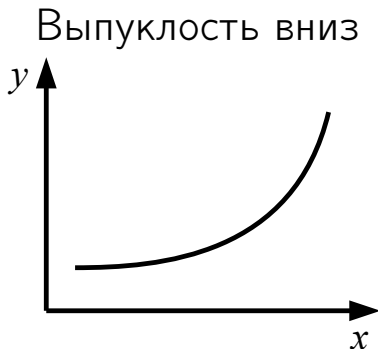
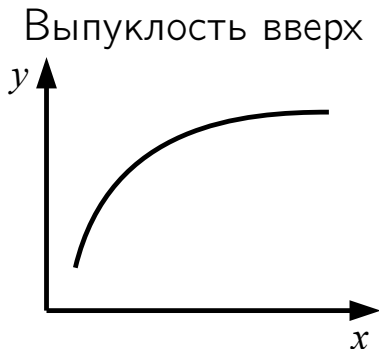
Выпуклость функции

Примеры:



Выпуклость функции

Примеры:



Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**



Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

1) $f''(x) \leq 0$, то $f(x)$ выпукла вверх,

2) $f''(x) \geq 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.



Выпуклость функции

Доказательство



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.

$$I(x) - f(x) =$$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



Выпуклость функции

=



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) -}{x_2 - x_1} \\ &\frac{-(f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$



Выпуклость функции

=



Выпуклость функции

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.



Выпуклость функции

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.
 $(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.



Выпуклость функции

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.
 $(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.
Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$.



Выпуклость функции

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$.

$\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) \geq f(x)$.



Выпуклость функции

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$.

$\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) \geq f(x)$.

$\Rightarrow f(x)$ выпукла вниз.



Выпуклость функции

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Если $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.



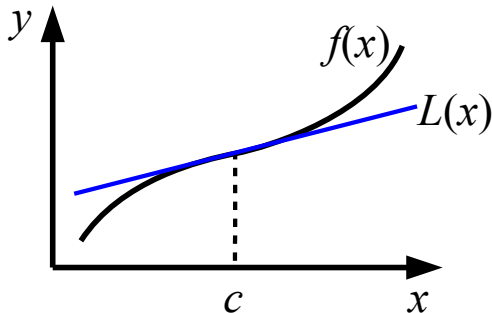
Выпуклость функции

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



Выпуклость функции

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



Выпуклость функции

*Теорема (необходимое условие перегиба)**



Выпуклость функции

*Теорема (необходимое условие перегиба)**

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.



Выпуклость функции

Доказательство



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке c вторую производную $f''(c)$,



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке c вторую производную $f''(c)$, и $L(x)$ - касательная к графику функции $f(x)$ в точке c :



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке c вторую производную $f''(c)$, и $L(x)$ - касательная к графику функции $f(x)$ в точке c :

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:



Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) =$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) &= \\ = L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2). \end{aligned}$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) &= \\ = L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2). \\ \Rightarrow f(x) - L(x) &= \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2). \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$ при $x \rightarrow c$.



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$ при $x \rightarrow c$.

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$ при $x \rightarrow c$.

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$ при $x \rightarrow c$.

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$

при условии, что $f''(c) \neq 0$.



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$,



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c ,



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.

\Rightarrow Если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$. ■



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие перегиба)



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c - это точка перегиба.



Схема полного исследования функции



Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
 - а) вертикальные
 - б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз

