Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 2.4

Аннотация

Формула Тейлора. Формула Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

1 Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n.$$

Свойство многочлена Тейлора

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е.

$$P_n(c) = f(c),\ P_n'(c) = f'(c),\ ...,\ P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)\cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c)\cdot 0 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot 0 = f(c).$$

$$P_n'(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + ... + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + ... + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + ... + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0 = f'(c)$$

Аналогично для остальных производных. ■

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n-ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ...+$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

2) форма Лагранжа

$r_n = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))(x-c)^{n+1}, 0 < \theta < 1$

Формулу Тейлора можно переписать в виде $f(x) = P_n(x) + r_n$. Отбросив остаточный член, получим $f(x) \approx P_n(x)$.

Из формы Пеано остаточного члена следует, что чем ближе x к c, тем точнее многочлен Тейлора $P_n(x)$ описывает функцию $f(x)$.

2 Формула Маклорена

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + ... + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{IV}(x) = \sin x & f^{IV}(0) = 0 \\ f^{V}(x) = \cos x & f^{V}(0) = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + ... + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\ + \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + \circ(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+2}), x \to 0.$$

Примеры:

$\sin x = x + \circ(x^2), x \to 0.$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4), x \to 0.$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6), x \to 0.$

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = 1$
$f^{V}(x) = -\sin x$	$f^{V}(0) = 0$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n+1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n+1}), x \to 0.$$

Примеры:

$\cos x = 1 + \circ(x), x \to 0.$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \circ(x^3), x \to 0.$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^5), x \to 0.$

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$
$f^{(m)}(x) = e^x$
$f^{(m)}(0) = 1$
$\Rightarrow e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \circ(x^n), x \to 0.$

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$

$f(0) = 1$
$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$
$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...+$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

Примеры:

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \circ(x^2), x \to 0.$

5) $f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = 0$
$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(1+x)^m}$
$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$
$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n), x \to 0.$