Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 2.2

Аннотация

Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл, правила вычисления и инвариантность формы относительно выбора переменной. Приближенные вычисления значений функции с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

1 Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2$$

© Семакин А.Н., 2017

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} = \cos x. \blacksquare$$

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. \blacksquare$$

2 Производные высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два способа обозначения производных высших порядков:

$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), ...$

$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), ...$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2$, $(2^x)'' = 2^x \ln^2 2$, $(2^x)''' = 2^x \ln^3 2$, ...,

$(2^x)^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.

© Семакин А.Н., 2017

3 Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.
$V = S'(t)$ - скорость
$a = V'(t) = S''(t)$ - ускорение

4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$.

Определение

Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $df(x_0)$

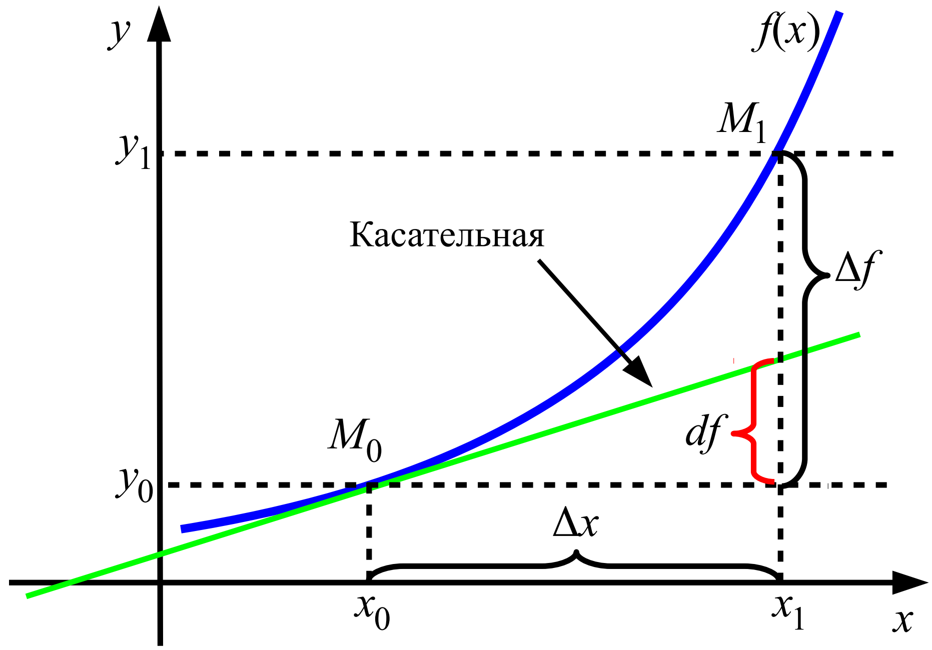
Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.}$$

Пример:
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$
$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3 \Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

5 Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx (см. рисунок).



Поскольку

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

то, чем меньше приращение аргумента Δx, тем ближе значение дифференциала к значению приращения функции.

6 Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

© Семакин А.Н., 2017

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Пример:
$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$
$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1 \Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$
Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$

7 Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$

8 Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx = v'(u_0)du$$

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.

© Семакин А.Н., 2017

9 Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $d^nf(x_0) = d(d^{n-1}f(x_0)) = f^{(n)}(x_0)dx^n$

© Семакин А.Н., 2017