Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c)+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n.$$

*Свойство многочлена Тейлора**

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е. $P_n(c) = f(c)$, $P_n'(c) = f'(c)$, ..., $P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$.

Доказательство

Доказательство

$P_n(c) =$

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c)+$$

$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n$$

Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c) +$$

$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)\cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c)\cdot 0 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot 0$$

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c)+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n =$$
$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)\cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c)\cdot 0 + ... +$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot 0 = f(c).$$

Формула Тейлора

$$P'_n(x) =$$

$$P_n'(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

Формула Тейлора

$P_n'(c) =$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1}$$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} = \\ = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0$$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0 =$$
$$= f'(c).$$

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0 =$$

$$= f'(c).$$

Аналогично для остальных производных. ■

Теорема (формула Тейлора)

Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x - c) +$$

$$+ \frac{1}{2!} f''(c)(x - c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.

Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

2) форма Лагранжа

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1},$$

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1$$

Формулу Тейлора можно переписать в виде:
$f(x) = P_n(x) + r_n.$

Формулу Тейлора можно переписать в виде:

$f(x) = P_n(x) + r_n.$

Отбросив остаточный член, получим

$f(x) \approx P_n(x).$

Формулу Тейлора можно переписать в виде:
$f(x) = P_n(x) + r_n$.
Отбросив остаточный член, получим
$f(x) \approx P_n(x)$.
Из формы Пеано остаточного члена следует, что чем ближе x к c, тем точнее многочлен Тейлора $P_n(x)$ описывает функцию $f(x)$.

Формула Маклорена

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad\qquad f'(0) = 1$

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = -1$

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{IV}(x) = \sin x$	$f^{IV}(0) = 0$
$f^{V}(x) = \cos x$	$f^{V}(0) = 1$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n+1, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$\sin x =$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5$$

Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 +$$
$$+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \ldots$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}\cdot 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 0\cdot x^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot(-1)\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 0\cdot x^4 + \\ + \frac{1}{5!}\cdot 1\cdot x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\cdot 0\cdot x^{2n} +$$

Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 +$$

$$+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} +$$

$$+ \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} +$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}\cdot 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 0\cdot x^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}\cdot(-1)\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 0\cdot x^4 +$$
$$+ \frac{1}{5!}\cdot 1\cdot x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\cdot 0\cdot x^{2n} +$$
$$+ \frac{1}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n\cdot x^{2n+1} +$$
$$+ \frac{1}{(2n+2)!}\cdot 0\cdot x^{2n+2} +$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}\cdot 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 0\cdot x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\cdot(-1)\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 0\cdot x^4 +$$

$$+ \frac{1}{5!}\cdot 1\cdot x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\cdot 0\cdot x^{2n} +$$

$$+ \frac{1}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n\cdot x^{2n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(2n+2)!}\cdot 0\cdot x^{2n+2} + \circ\left(x^{2n+2}\right) =$$

Формула Маклорена

$$=$$

Формула Маклорена

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}) =$$

Формула Маклорена

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+2}), x \to 0.$$

Примеры:

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), x \to 0.$$

Примеры:

$$\sin x = x + \circ(x^2), x \to 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4), x \to 0.$$

Формула Маклорена

Примеры:

$$\sin x = x + \circ(x^2), x \to 0.$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4), x \to 0.$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6), x \to 0.$$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

2) $y = \cos x$
$f(0) = 1$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad$ $f''(0) = -1$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \qquad f^{IV}(0) = 1$

Формула Маклорена

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \qquad f^{IV}(0) = 1$

$f^{V}(x) = -\sin x \qquad f^{V}(0) = 0$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n+1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$\cos x =$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}) =$$

Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n+1}), x \to 0.$$

Примеры:

Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + \circ(x), x \to 0.$$

Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + \circ(x), x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^3), x \to 0.$$

Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + \circ(x), x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^3), x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^5), x \to 0.$$

Формула Маклорена

3) $f(x) = e^x$

Формула Маклорена

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

Формула Маклорена

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f^{(m)}(x) = e^x$

Формула Маклорена

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f^{(m)}(x) = e^x$

$f^{(m)}(0) = 1$

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f^{(m)}(x) = e^x$

$f^{(m)}(0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n),\ x \to 0.$$

Формула Маклорена

4) $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$

4) $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$

$f(0) = 1$

Формула Маклорена

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$

$f(0) = 1$

$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$

4) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$f(0) = 1$

$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$

$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} =$$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 +$$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n) =$$

Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^n +$$
$$+ \circ(x^n), x \to 0.$$

Примеры:

Примеры:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2),\, x \to 0.$$

Формула Маклорена

5) $f(x) = \ln(1 + x)$

Формула Маклорена

5) $f(x) = \ln(1+x)$
$f(0) = 0$

Формула Маклорена

5) $f(x) = \ln(1 + x)$

$f(0) = 0$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

5) $f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = 0$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$

Формула Маклорена

5) $f(x) = \ln(1 + x)$

$f(0) = 0$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$$

$\Rightarrow \ln(1 + x) =$

Формула Маклорена

5) $f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = 0$

$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(1+x)^m}$

$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$

$\Rightarrow \ln(1+x) =$

$= x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n), x \to 0.$