

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление
функций одной переменной
Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Производная



Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 .



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 .



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда

$$\Delta x = x_1 - x_0$$



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда $\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1 ,



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1 ,

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1 ,

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1 . Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1 ,

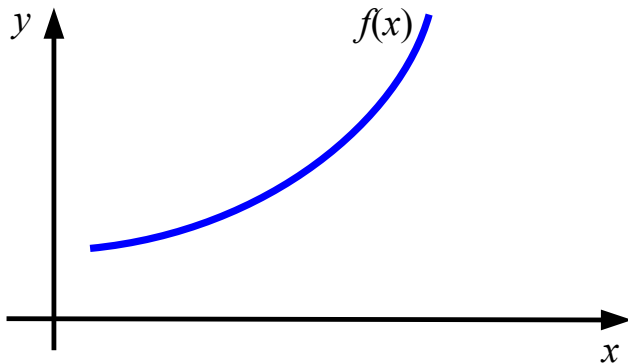
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0 .



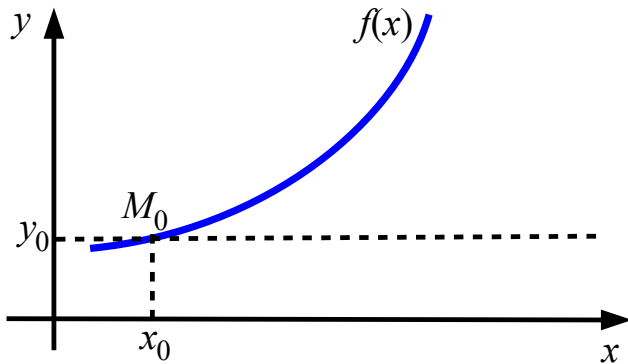
Производная



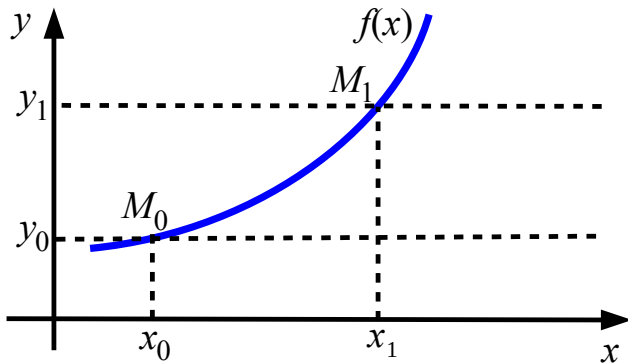
Производная



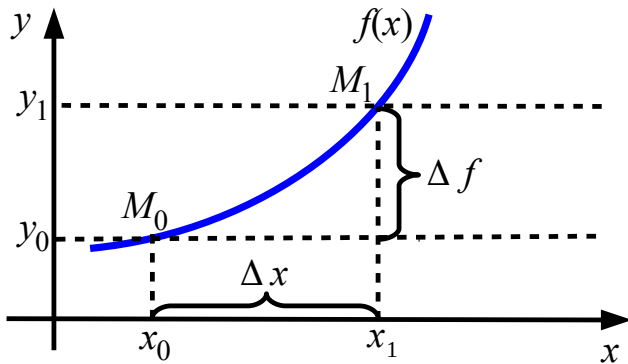
Производная



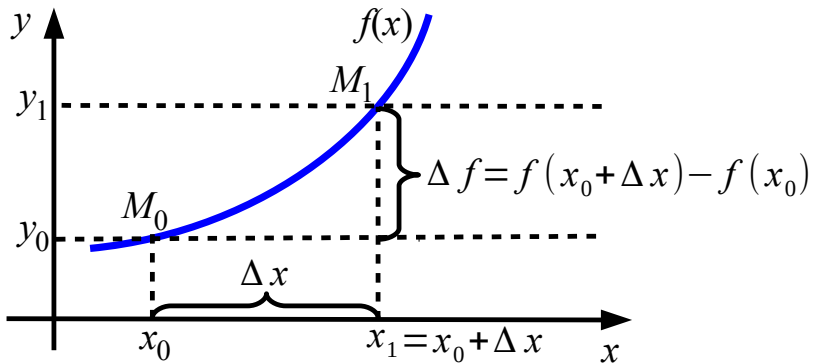
Производная



Производная



Производная



Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.



Если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует
бесконечная производная.



Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.



Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.



Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.



Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)



Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$



Определение

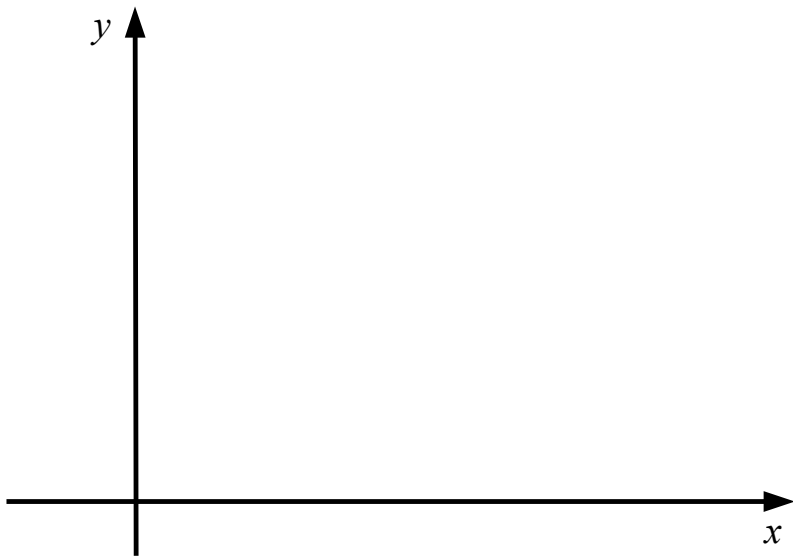
Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.



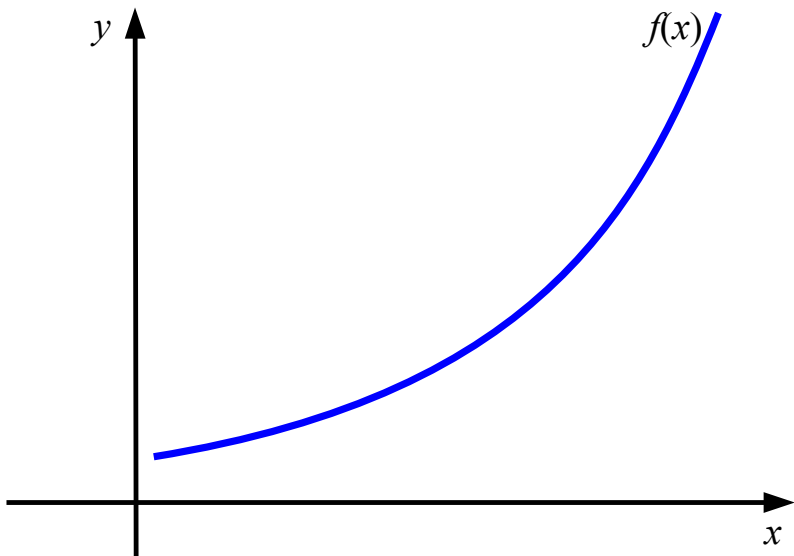
Геометрический смысл производной



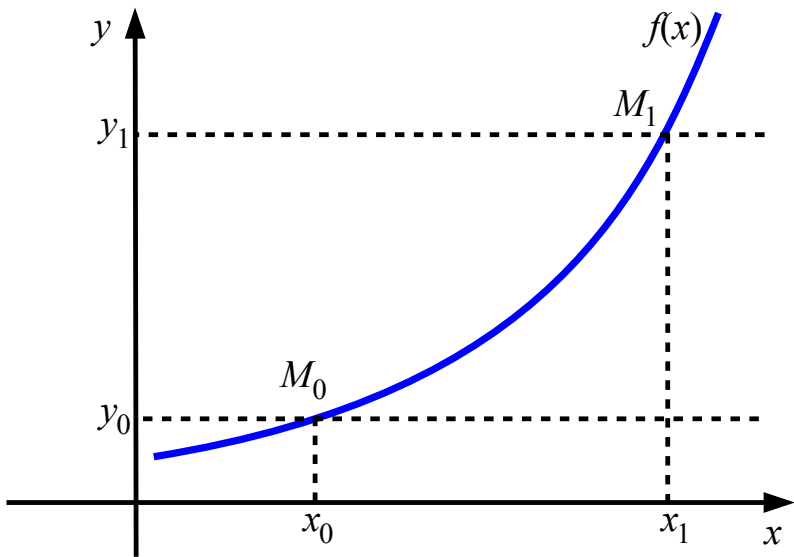
Геометрический смысл производной



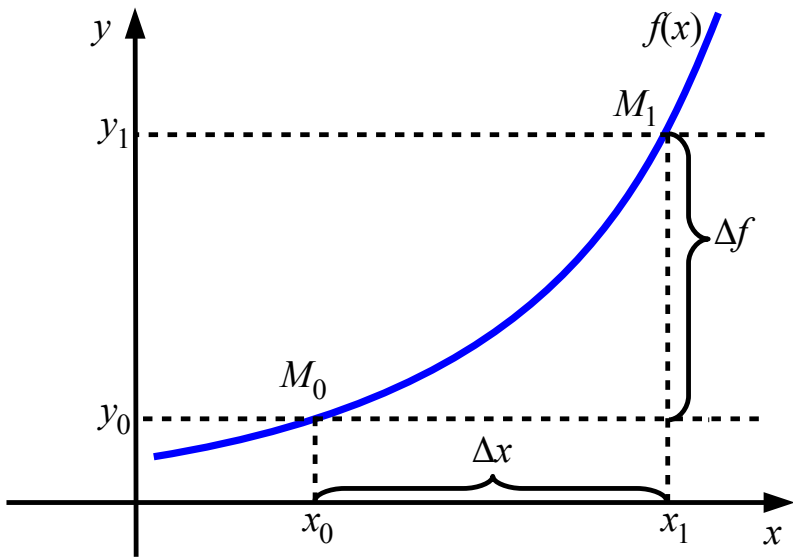
Геометрический смысл производной



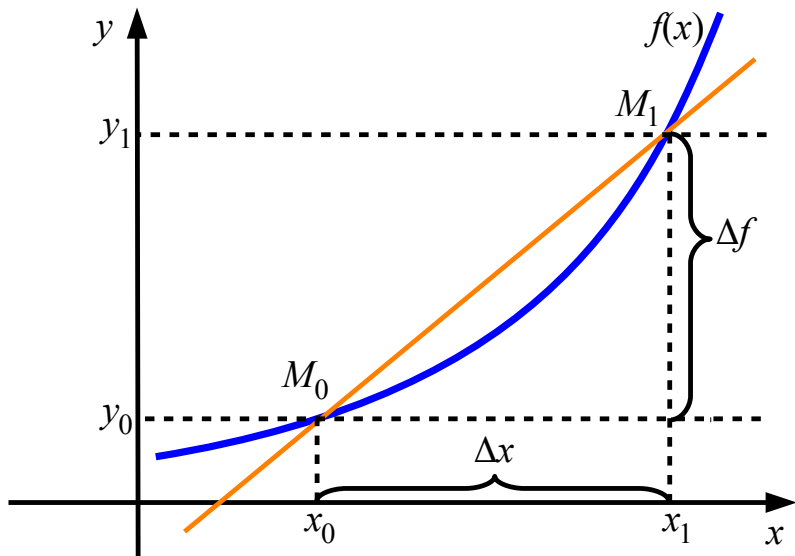
Геометрический смысл производной



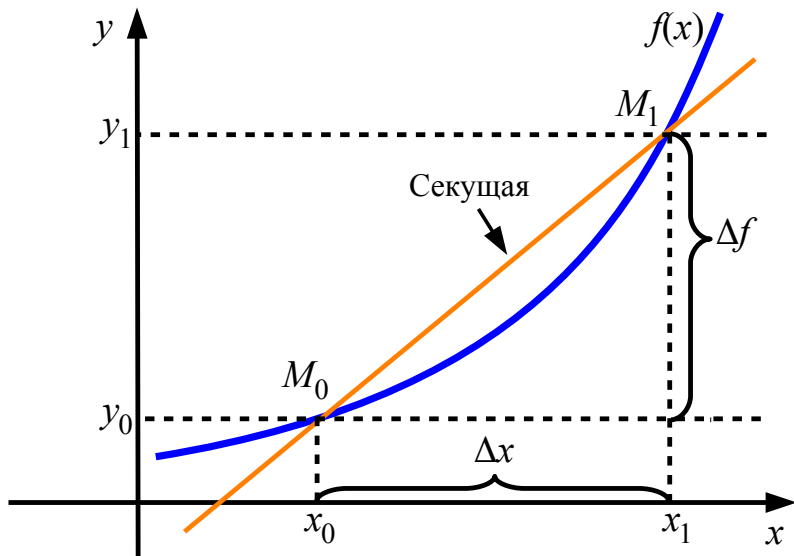
Геометрический смысл производной



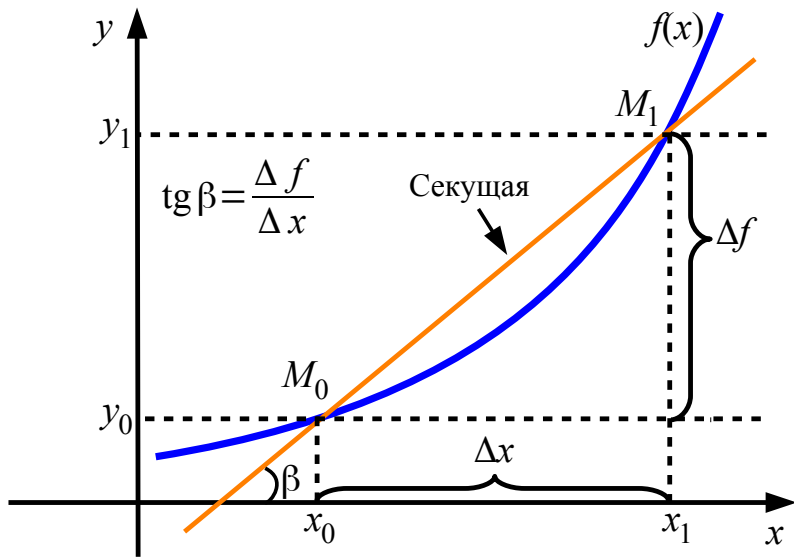
Геометрический смысл производной



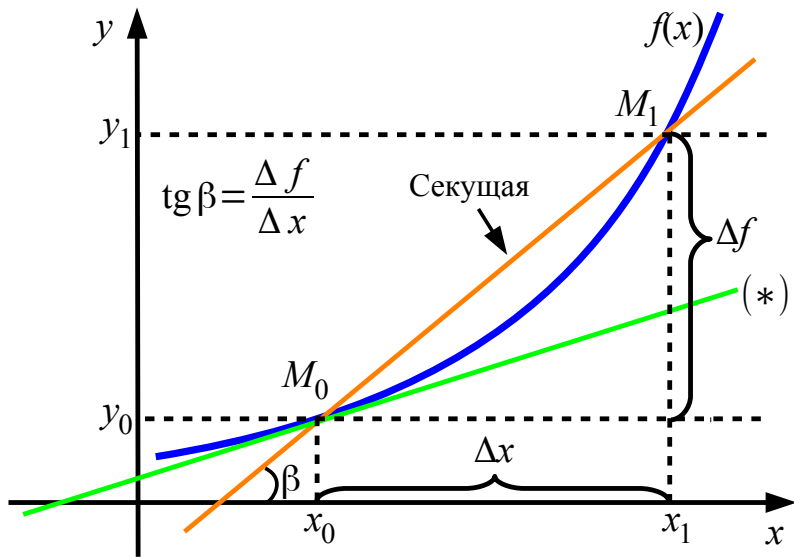
Геометрический смысл производной



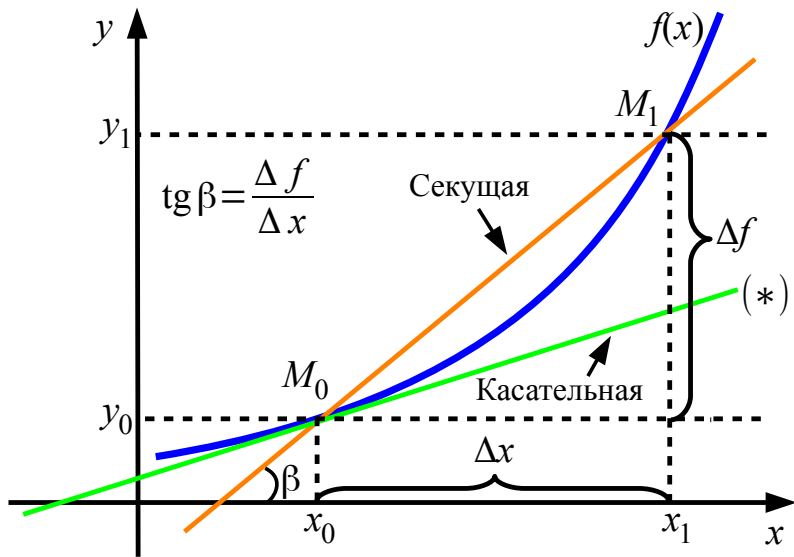
Геометрический смысл производной



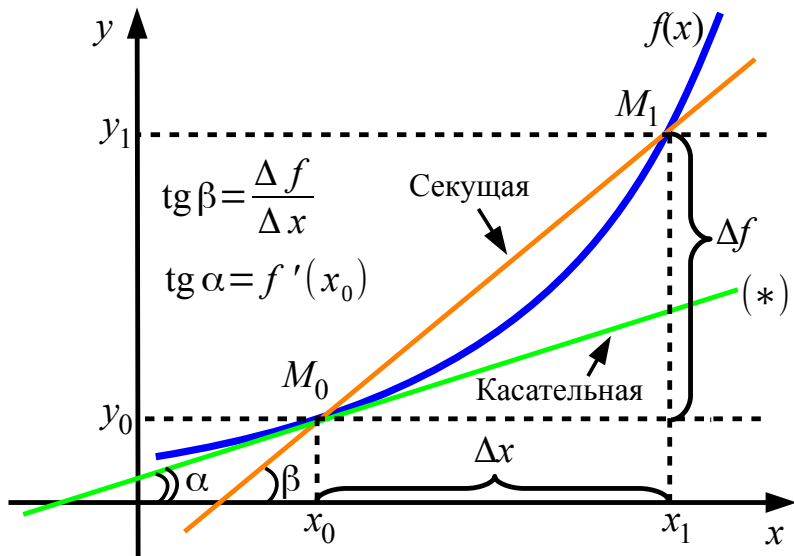
Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$. Устремив точку M_1 к точке M_0 , мы переведем секущую M_0M_1 в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.



Определение

Предельное положение секущей M_0M_1 , когда $M_1 \rightarrow M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий

$$y_0 = kx_0 + b \text{ и } y_1 = kx_1 + b.$$



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий

$$y_0 = kx_0 + b \text{ и } y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.



Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:



Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} (x - x_0) + y_0 \right).$$



Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} (x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 , то



Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} (x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Геометрический смысл производной

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

Откуда следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .



Физический смысл производной



Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ – длина пути, пройденного телом за время t .



Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t . Тогда средняя скорость движения тела на промежутке $[t, t + \Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$



Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t . Тогда средняя скорость движения тела на промежутке $[t, t + \Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V = \frac{dS}{dt}.$$



Дифференцируемость функции



Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.



Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$



Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .



Дифференцируемость функции

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**



Дифференцируемость функции

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$



Дифференцируемость функции

Доказательство



Дифференцируемость функции

Доказательство

1) необходимость (\Rightarrow)



Дифференцируемость функции

Доказательство

1) необходимость (\Rightarrow)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$



Дифференцируемость функции

Доказательство

1) необходимость (\Rightarrow)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказать: $\exists f'(x_0)$



Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad : \Delta x \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) : \Delta x \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) : \Delta x \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



$$\exists f'(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



$$\exists f'(x_0) = A.$$



2) достаточность (\Leftarrow)



Дифференцируемость функции

2) достаточность (\Leftarrow)

Дано: $\exists f'(x_0)$



Дифференцируемость функции

2) достаточность (\Leftarrow)

Дано: $\exists f'(x_0)$

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) - \text{бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0.$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) - \text{бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Отсюда $\Delta f =$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) - \text{бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0.$$

$$\text{Отсюда } \Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) =$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in D(x_0).$$



Дифференцируемость функции

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**



Дифференцируемость функции

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$



Дифференцируемость функции

Доказательство



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0)$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f =$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) =$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$



Вычисление производных



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над f ..:



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ф.:

$$1. (u + v)' = u' + v'$$



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над f ..:

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над f :

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над ϕ .

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$4. (cu)' = c \cdot u'$$



Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над f :

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$4. (cu)' = c \cdot u'$$

$$5. c' = 0$$



Вывод формулы 2:



Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x),$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x),$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x), v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$$



Вывод формулы 2:

$$y = uv$$



Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\Delta y =$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) =\end{aligned}$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$y' =$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$y' = (uv)' =$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= (uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) =\end{aligned}$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= (uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) = \\ &= uv' + u'v + u' \cdot 0 =\end{aligned}$$



Вычисление производных

Вывод формулы 2:

$$y = uv$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)\Delta v + \Delta uv(x) + \Delta u\Delta v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= (uv)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) = \\ &= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v. \blacksquare\end{aligned}$$



Производная обратной функции:



Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' =$$



Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$



Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$



Вычисление производных

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$



Производная сложной функции



Вычисление производных

Производная сложной функции

Если $y = u(v(x))$ - сложная функция, существуют $v'(x_0)$ и $u'(v_0)$, где $v_0 = v(x_0)$, то $y'(x_0) = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$.

