Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.5

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c,

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c, ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами.

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{a(x-c)^n + \circ((x-c)^n)}{b(x-c)^m + \circ((x-c)^m)}.$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x-c)$ в наименьшей из n и m степени

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

$$\lim_{x \to c} \frac{o((x-c)^{\alpha})}{(x-c)^{\beta}} = 0, \text{если } \alpha \geq \beta.$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=?$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3),\ x \to 0,$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3), x \to 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \circ(x^3), x \to 0,$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3), x \to 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \circ(x^3), x \to 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4), x \to 0.$$

Тогда

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3) -}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \circ(x^4)}$$

$$\frac{-1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \circ(x^3) - 2x}{} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$=$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} o(x^n) - o(x^n) = o(x^n), \\ - o\,(x^n) = o(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} o(x^n) - o(x^n) = o(x^n), \\ - o\,(x^n) = o(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\circ(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ\,(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\circ(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,а $r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c, тем точнее данная формула.

Пример:

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5,$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,\ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,\ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},\ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$

Монотонность функции

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** **(убывающей)** на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$(f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей (строго убывающей)** на интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2\colon f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

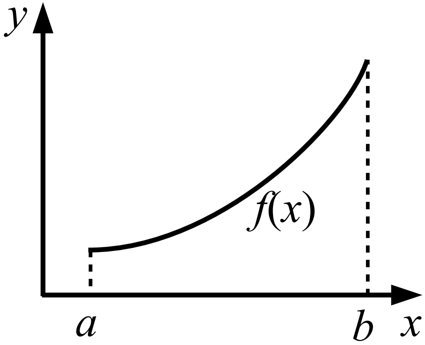
Определение

Возрастающие и убывающие функции также называются **монотонными**.

Монотонность функции

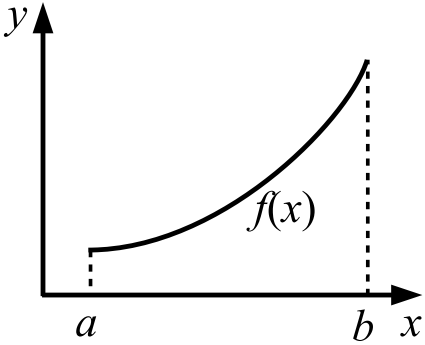
Примеры:

Примеры:

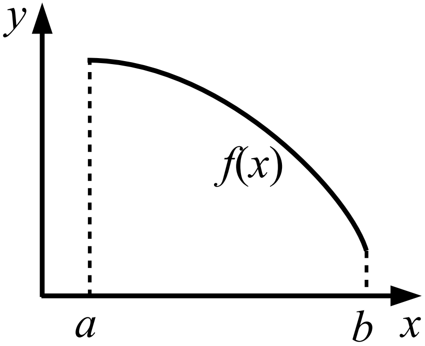


Возрастающая функция

Примеры:



Возрастающая функция



Убывающая функция

Монотонность функции

Обозначения

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a,b), f(x) \in C[a,b]$

Монотонность функции

Обозначения
$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a,b), f(x) \in C[a,b]$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c, на интервале (a,b), на отрезке $[a,b]$.

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a,b), f(x) \in D[a,b]$

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производную $f'(x)$.

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$

Монотонность функции

Обозначения
$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**
Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, то на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Доказательство

Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$f(x_2) \leq f(x_1)$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$f(x_2) \leq f(x_1)$ - $f(x)$ убывает.

$\blacksquare$

Экстремум функции

Экстремум функции

Определение

Точка c называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю.

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю или не существует.

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если

$$\exists U(c)\ \forall x \in U(c)\colon f(x) \leq f(c)\ (f(x) \geq f(c)).$$

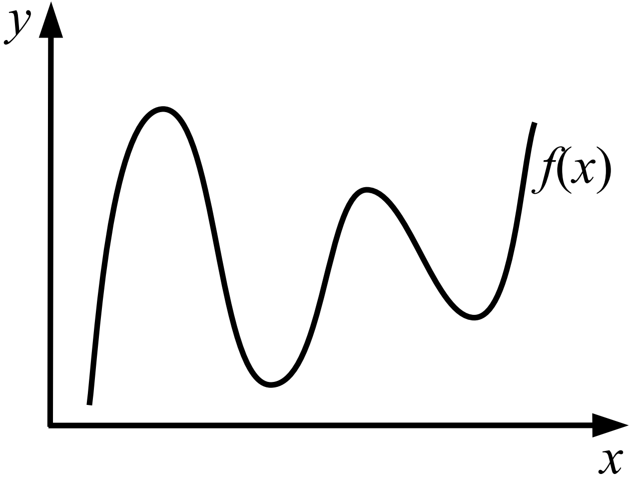
Определение
Точки локального максимума и минимума также называются **точками экстремума**.

Экстремум функции

Определение
Значение функции $f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называется **локальным максимумом (минимумом)** или **экстремумом функции**.

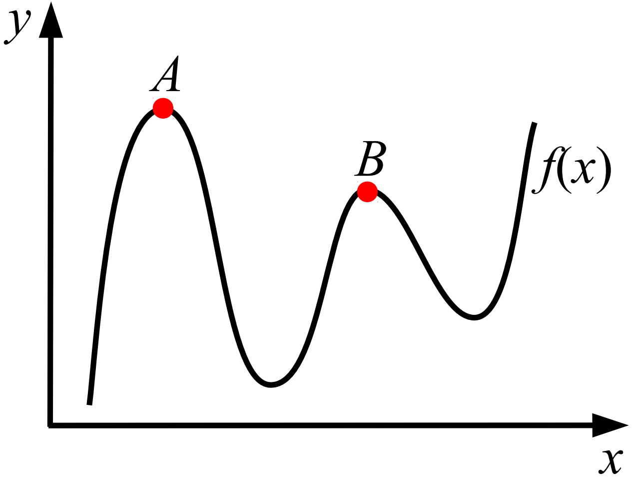
Пример:

Пример:

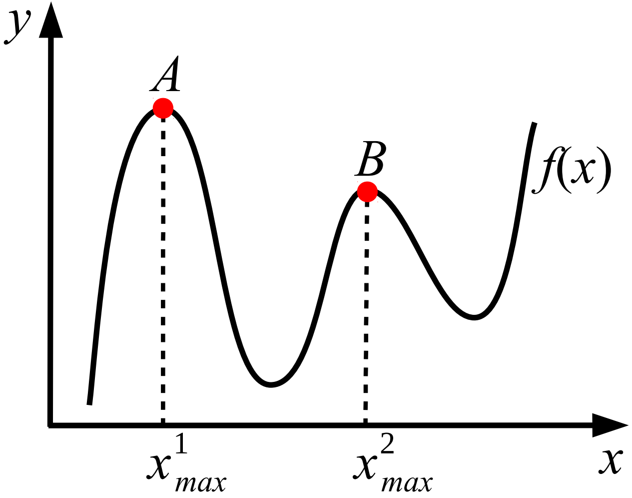


Экстремум функции

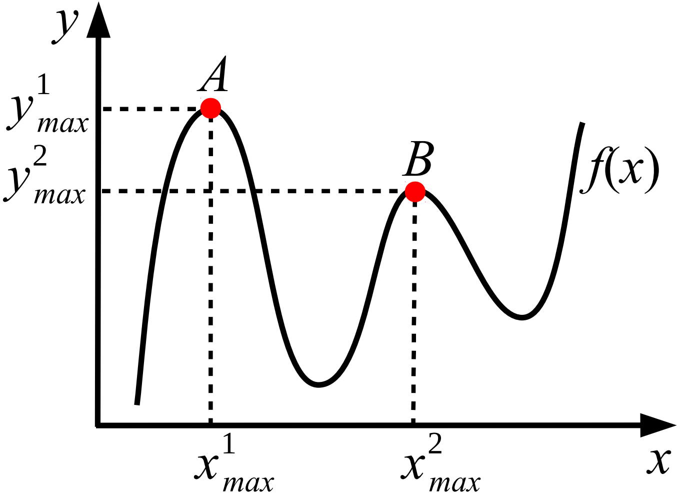
Пример:



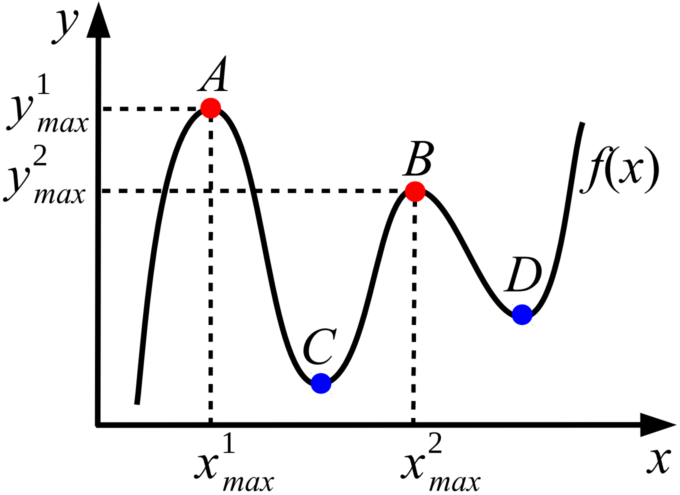
Пример:



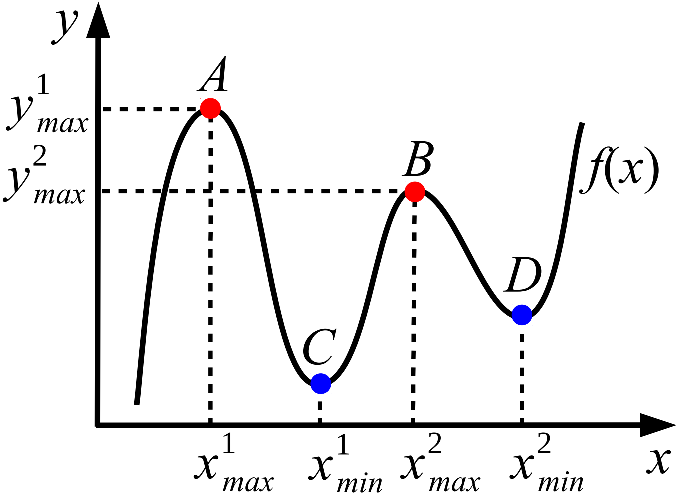
Пример:



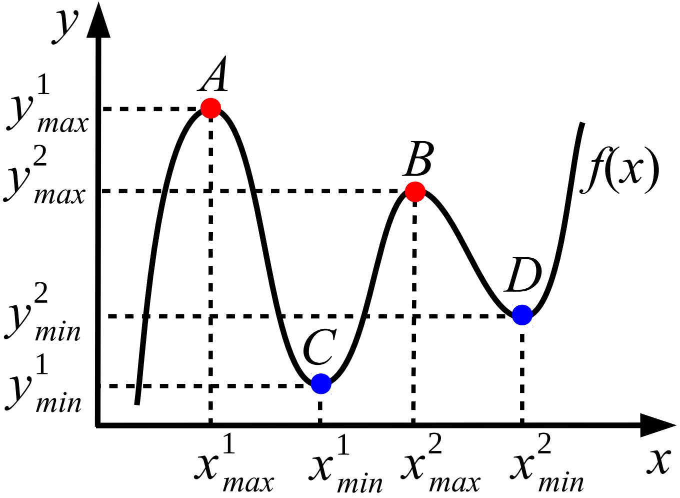
Пример:



Пример:



Пример:



Здесь

Здесь
x_{min}^1, x_{min}^2 - точки локального минимума,

Экстремум функции

Здесь
x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума,
x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума.

Экстремум функции

Здесь
x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума,
x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума.

Соответственно,

Здесь
x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума,
x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума.

Соответственно,
y^1_{min}, y^2_{min} - локальные минимумы,

Экстремум функции

Здесь

x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума,

x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума.

Соответственно,

y^1_{min}, y^2_{min} - локальные минимумы,

y^1_{max}, y^2_{max} - локальные максимумы.

Здесь
x^1_{min}, x^2_{min} - точки локального минимума,
x^1_{max}, x^2_{max} - точки локального максимума.

Соответственно,
y^1_{min}, y^2_{min} - локальные минимумы,
y^1_{max}, y^2_{max} - локальные максимумы.

Точки A, B, C, D - экстремальные точки графика функции.