Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 2.1

Аннотация

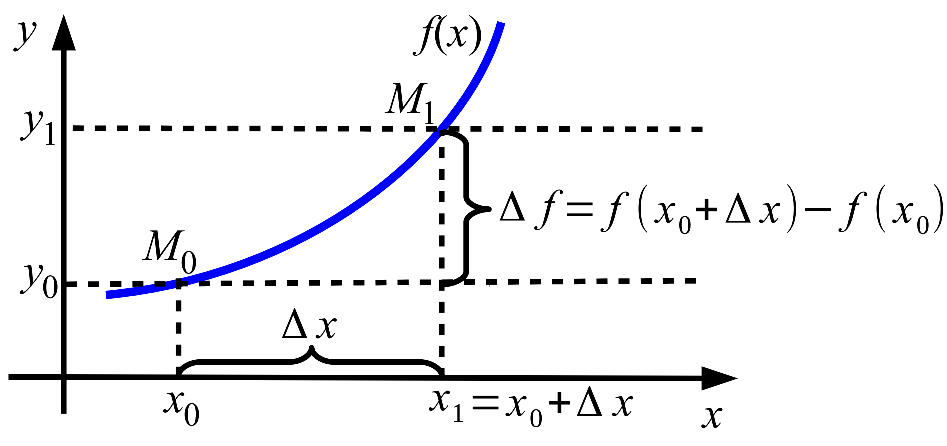
Производная функции, ее геометрический и физический смыслы. Односторонние производные, их связь с двусторонней производной. Дифференцируемость функции. Свойства дифференцируемых функций. Правила нахождения производных.

1 Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0.



Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$

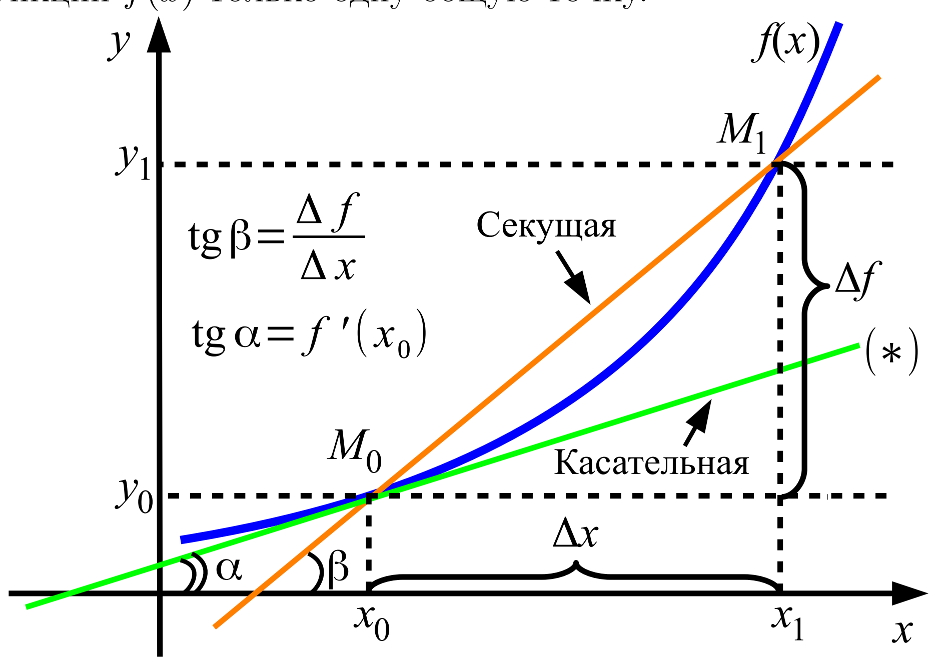
Определение

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

2 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$ (см. рисунок ниже). Устремив точку M_1 к точке M_0, мы переведем секущую M_0M_1 в прямую $(*)$, которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.



Определение

Предельное положение секущей M_0M_1, когда $M_1 \to M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий $y_0 = kx_0 + b$ и $y_1 = kx_1 + b$. Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Откуда следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

3 Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на промежутке $[t, t+\Delta t]$ будет

$$V_{sr} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

4 Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказать: $\exists f'(x_0)$

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$
$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0) = A$.

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$
Доказать: $f(x) \in D(x_0)$
$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.
По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.
Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$
$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\Rightarrow f(x) \in D(x_0)$.
■

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство
$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0)$.
■

5 Вычисление производных

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над функциями:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(cu)' = c \cdot u'$
5. $c' = 0$

Вывод формулы 2:

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$$
$$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x), v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$$
$$y = uv$$
$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$
$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u \Delta v$$
$$y' = (uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v) =$$
$$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$
■

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ ■

Производная сложной функции

Если $y = u(v(x))$ - сложная функция, существуют $v'(x_0)$ и $u'(v_0)$, где $v_0 = v(x_0)$, то $y'(x_0) = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$.