

# Математический анализ

## Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### Лекция 2.8

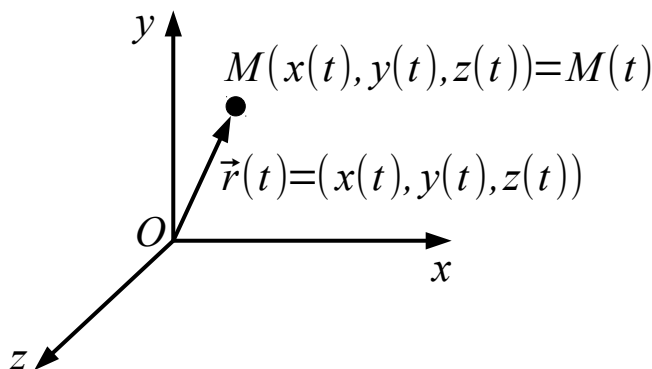
#### Аннотация

Элементы теории кривых. Кривизная и радиус кривизны плоской кривой.

## 1 Теория кривых

Пусть векторы  $\vec{r}(t)$  при всех значениях переменной  $t$  прикреплены к точке  $O$ , которая является началом декартовой системы координат.

Вектор  $\vec{r}(t)$  соединяет точку  $O$  с некоторой точкой  $M$ . Соответственно,  $\vec{r}(t)$  является радиус-вектором точки  $M$ . Тогда за координаты точки  $M$  принимаются координаты вектора  $\vec{r}(t)$ .



#### Определение

Непрерывное отображение отрезка  $[a, b]$  числовой прямой в трехмерное пространство  $R^3$  называется **кривой** и обозначается  $\Gamma$ .

*Способы задания кривой:*

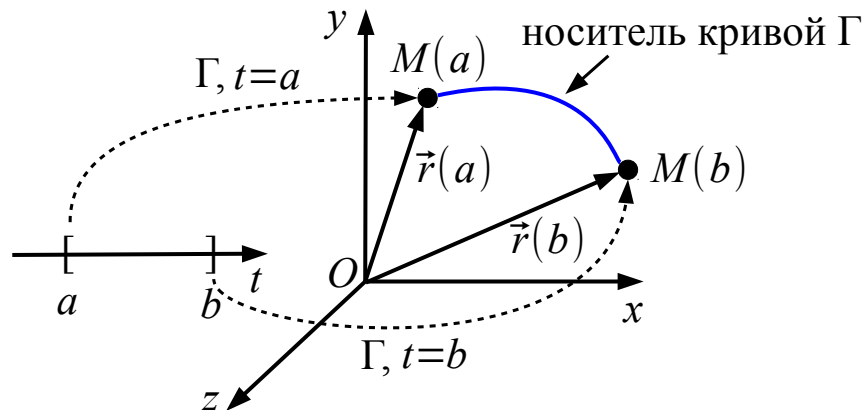
1.  $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$  - точечное представление. Кривая  $\Gamma$  задается как отображение  $M(t)$ , ставящее в соответствие числу  $t$  точку  $M$  пространства.

2.  $\Gamma = \{\vec{r}(t) | a \leq t \leq b\}$  - векторное представление. Кривая  $\Gamma$  задается в виде векторной функции  $\vec{r}(t)$ , ставящей в соответствие числу  $t$  радиус-вектор  $\vec{r}$  точки пространства.

3.  $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) | a \leq t \leq b\}$  - координатное представление. Кривая  $\Gamma$  задается в виде трех скалярных функций, представляющих собой координаты точки в заданной декартовой системе координат.

*Определение*

Множество точек трехмерного пространства  $R^3$ , на которое отображается отрезок  $[a, b]$ , называется **носителем кривой  $\Gamma$** .



*Определение*

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то кривая называется **плоской**.

*Замечание:*

В дальнейшем под словом кривая мы будем понимать как саму кривую (отображение), так и ее носитель в зависимости от контекста.

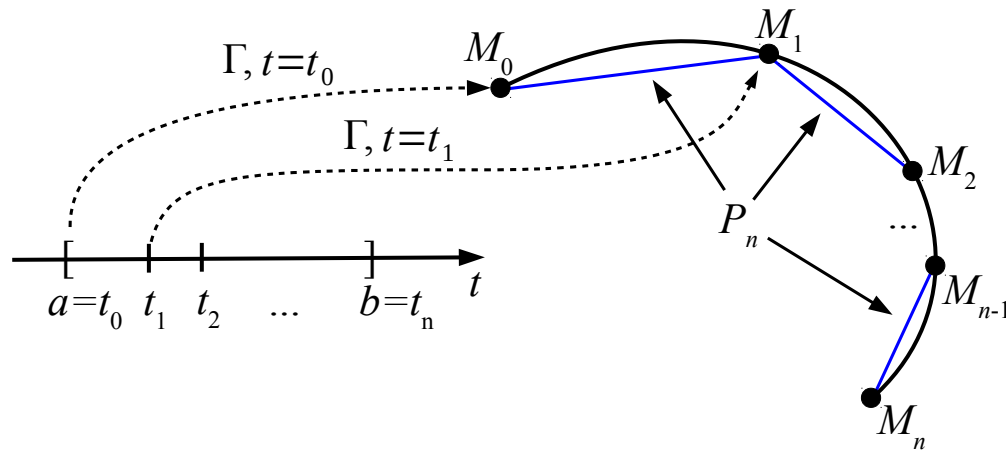
*Определение*

Последовательность точек  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , удовлетворяющая условию  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ , называется **разбиением отрезка**  $[a, b]$ .

*Определение*

Последовательность точек кривой  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , соответствующая значениям  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , называется **разбиением кривой**  $\Gamma$ .

Соединив точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$  отрезками, получим ломаную  $P_n$ , которая называется **вписанной в кривую**  $\Gamma$ .



Длина каждого отрезка  $M_{k-1}M_k$  равна  $|\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})|$ . Следовательно, длина  $\sigma_n$  всей ломаной  $P_n$  равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})|.$$

*Определение*

**Длиной кривой**  $\Gamma$  называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных  $P_n$ , т.е.

$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$

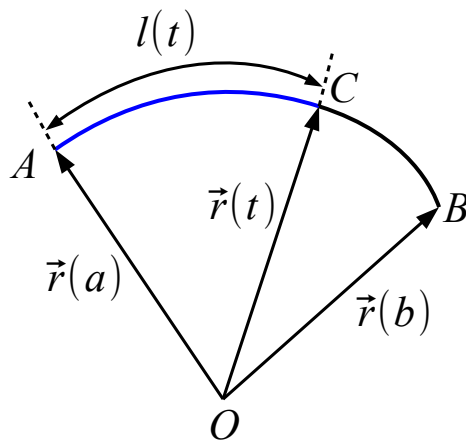
*Определение*

Если функция  $\vec{r}'(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то кривая  $\Gamma$  называется **непрерывно дифференцируемой**.

*Теорема (о переменной длине дуги)*

Пусть кривая  $\Gamma$  непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги  $l$ , отсчитываемая от начала  $\vec{r}(a)$  кривой  $\Gamma$ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной  $t$ . При этом

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$



На рисунке  $l(t)$  - длина участка  $AC$  кривой  $AB$ .

Рассмотрим плоскую кривую  $\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}$ . Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\Downarrow$$

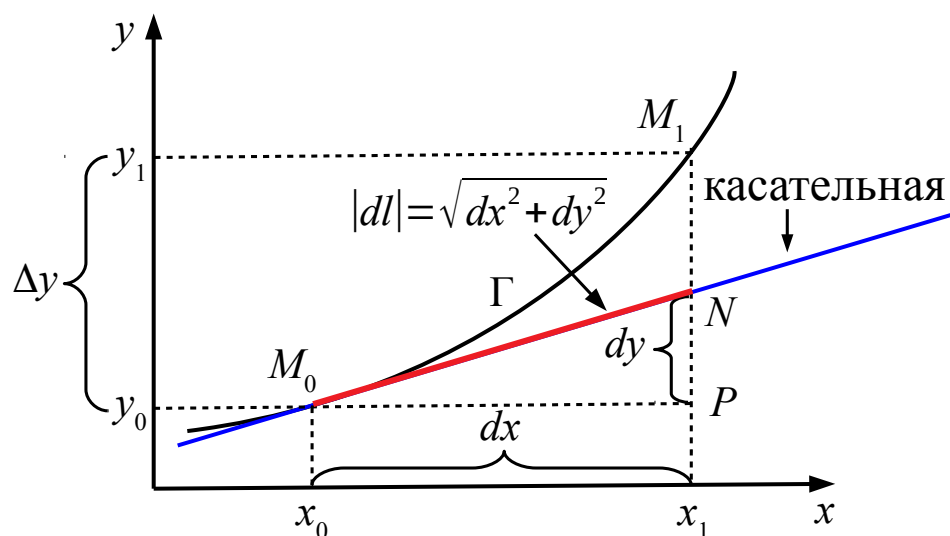
$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

ИЛИ

$$(dl)^2 = (x' dt)^2 + (y' dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Здесь  $dl$  - дифференциал длины дуги  $l = l(t)$  плоской кривой  $\Gamma$ .

*Геометрический смысл дифференциала  $dl$ :*



Пусть кривая  $\Gamma$  в окрестности точки  $x_0$  совпадает с графиком функции  $y = f(x)$ . Тогда

$M_0P = dx = x_1 - x_0$  - приращение аргумента  $x$  функции  $f(x)$  при переходе от точки  $x_0$  к точке  $x_1$ .

$PM_1 = \Delta y = y_1 - y_0$  - приращение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , соответствующее приращению аргумента  $dx$ .

$PN = dy = f'(x_0)dx$  - приращение ординаты касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  при переходе к точке  $x_1$ .

Поскольку  $\Delta M_0PN$  - прямоугольный треугольник, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$

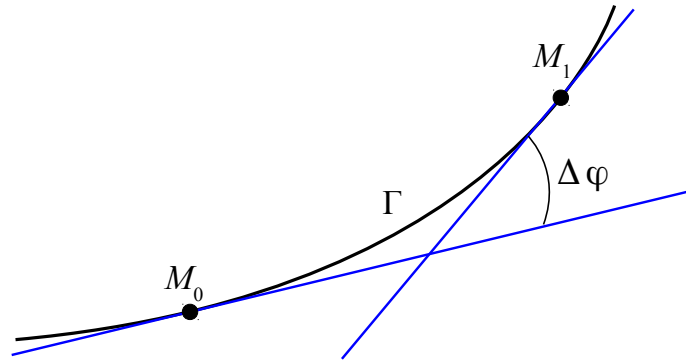
$\Downarrow$

$$|dl| = M_0N.$$

Отсюда получаем, что дифференциал длины дуги  $dl$  по абсолютной величине равен длине участка касательной, заключенного между точками  $x_0$  и  $x_1$ .

## 2 Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой  $\Gamma$  точки  $M_0$  и  $M_1$ . Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки  $M_0$  к точке  $M_1$  касательная поворачивается на угол  $\Delta\varphi$ .



*Определение*

Отношение угла  $\Delta\varphi$  к длине  $\Delta l$  дуги, заключенной между точками  $M_0$  и  $M_1$ , называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

$K_{sr}$  характеризует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше  $K_{sr}$ , тем ближе кривая к прямой.

*Определение*

**Кривизной кривой**  $\Gamma$  в точке  $M_0$  называется предел

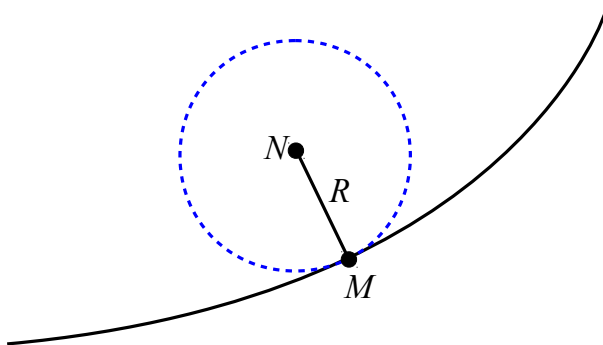
$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} K_{sr}.$$

*Определение*

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение:  $R = \frac{1}{K}$ .

Проведем к кривой  $\Gamma$  в точке  $M$  нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок  $MN$  с длиной, равной  $R$ .

*Определение*

Точка  $N$  называется **центром кривизны**, а окружность с центром в точке  $N$  и радиусом  $R$  - **окружностью кривизны** плоской кривой в точке  $M$ .