Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.8

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Теория кривых

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O, которая является началом декартовой системы координат.

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O, которая является началом декартовой системы координат.
Вектор $\overline{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M.

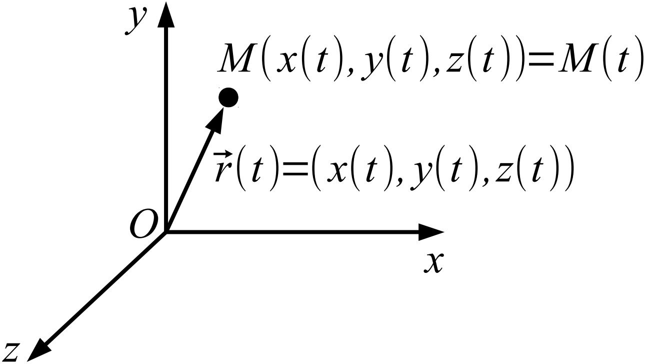
Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O, которая является началом декартовой системы координат.

Вектор $\overline{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M. Соответственно, $\overline{r}(t)$ является радиус-вектором точки M.

Теория кривых

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O, которая является началом декартовой системы координат.
Вектор $\overline{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M. Соответственно, $\overline{r}(t)$ является радиус-вектором точки M. Тогда за координаты точки M принимаются координаты вектора $\overline{r}(t)$.

Теория кривых



Определение
Непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ числовой прямой в трехмерное пространство R^3 называется **кривой** и обозначается Γ.

Способы задания кривой:

Способы задания кривой:

1. $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$ - точечное представление.

Способы задания кривой:
1. $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$ - точечное представление. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.

Способы задания кривой:
1. $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$ - точечное представление. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.
2. $\Gamma = \{\overline{r}(t) | a \leq t \leq b\}$ - векторное представление.

Способы задания кривой:
1. $\Gamma = \{M(t) | a \leq t \leq b\}$ - точечное представление. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.
2. $\Gamma = \{\overline{r}(t) | a \leq t \leq b\}$ - векторное представление. Кривая Γ задается в виде векторной функции $\overline{r}(t)$, ставящей в соответствие числу t радиус-вектор $\overline{r}$ точки пространства.

Способы задания кривой:

3. $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) | a \le t \le b\}$ - координатное представление.

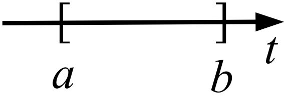
Способы задания кривой:

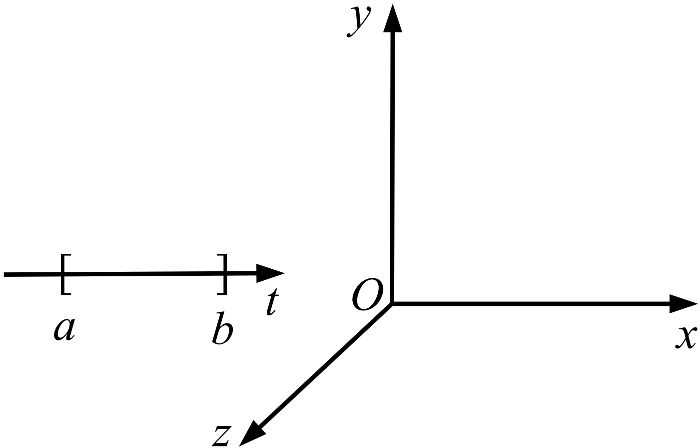
3. $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) | a \leq t \leq b\}$ - координатное представление. Кривая Γ задается в виде трех скалярных функций, представляющих собой координаты точки в заданной декартовой системе координат.

Определение

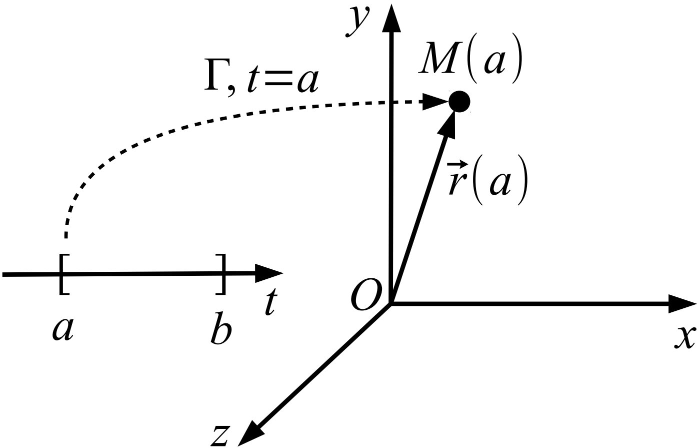
Множество точек трехмерного пространства R^3, на которое отображается отрезок $[a, b]$, называется **носителем кривой** Γ.

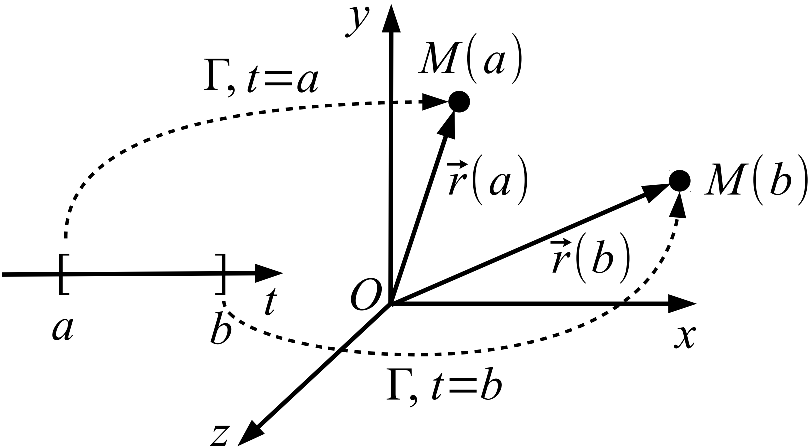

t

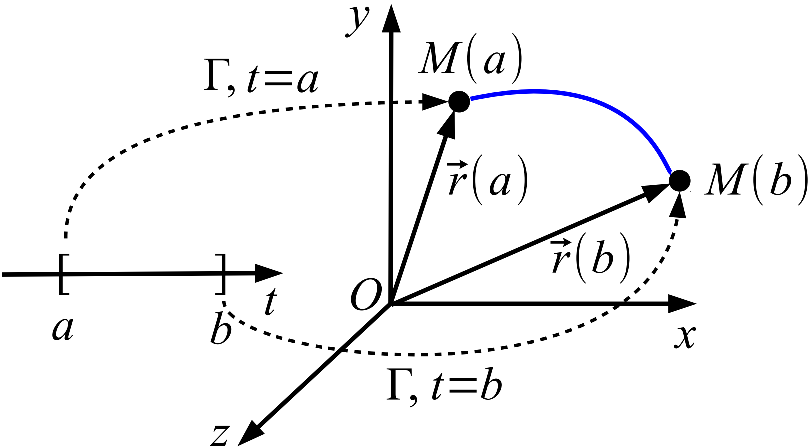

a
b
t

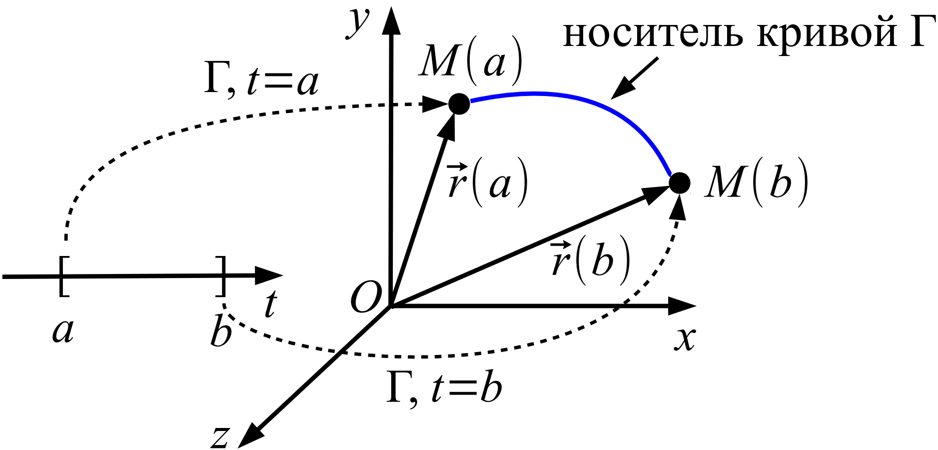

y
a
b
t
O
x
z

Теория кривых




y
$M(a)$
$\Gamma, t=a$
$\vec{r}(a)$
$M(b)$
$\vec{r}(b)$
t
O
a
b
x
$\Gamma, t=b$
z


y
$M(a)$
$\Gamma, t=a$
$\vec{r}(a)$
$M(b)$
$\vec{r}(b)$
a
b
t
O
x
$\Gamma, t=b$
z


носитель кривой Γ
y
$M(a)$
$\Gamma, t{=}a$
$\vec{r}(a)$
$M(b)$
$\vec{r}(b)$
t
O
a
b
x
$\Gamma, t{=}b$
z

Определение

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то кривая называется **плоской**.

Замечание:

В дальнейшем под словом кривая мы будем понимать как саму кривую (отображение), так и ее носитель в зависимости от контекста.

Определение

Последовательность точек $t_0, t_1, \ldots, t_n$, удовлетворяющая условию

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$,

называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Определение

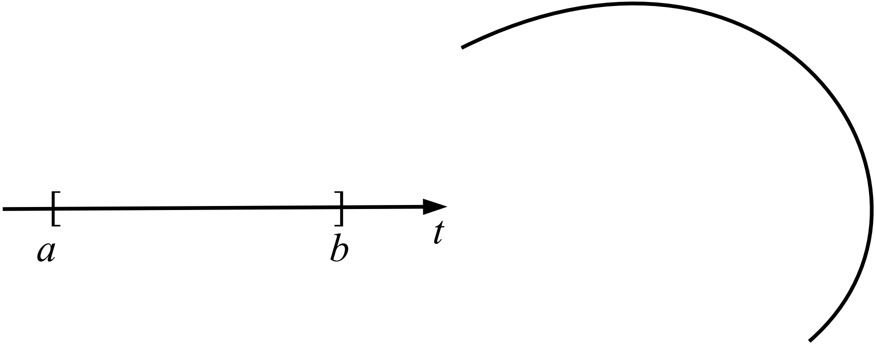
Последовательность точек кривой $M_0, M_1, \ldots, M_n$, соответствующая значениям $t_0, t_1, \ldots, t_n$, называется **разбиением кривой** Γ.

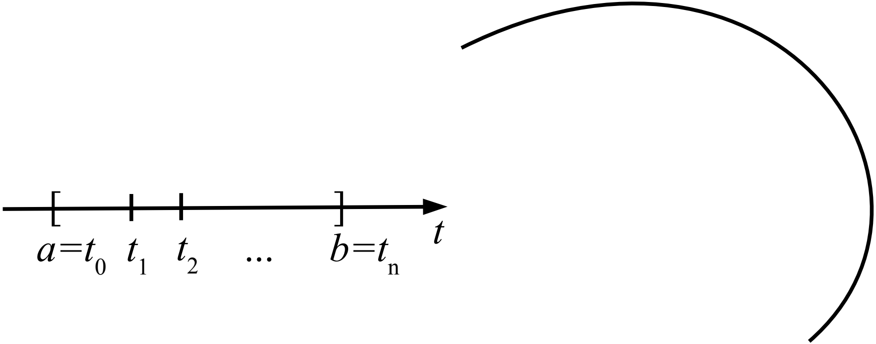
Соединив точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ отрезками, получим ломаную P_n, которая называется **вписанной в кривую** Γ.


t

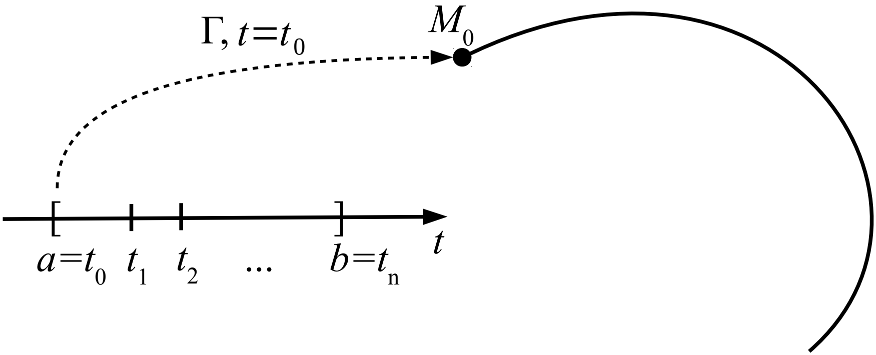

a
b
t

Теория кривых

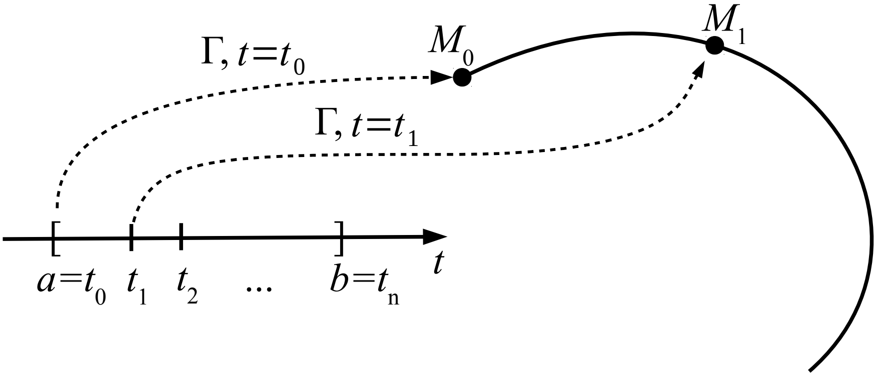


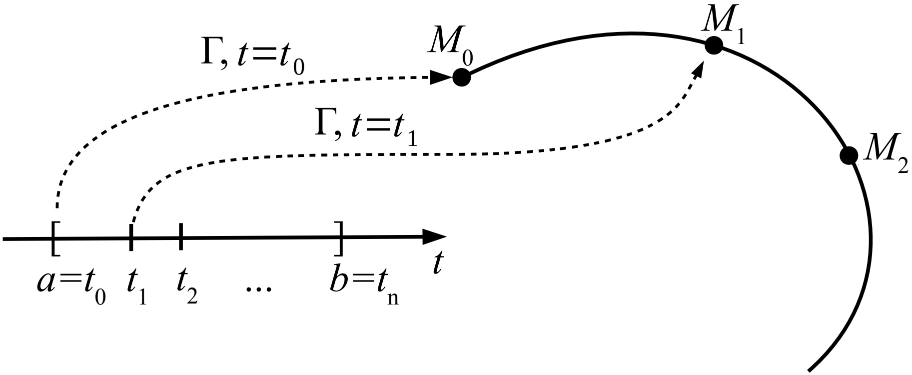

$a=t_0$
t_1
t_2
...
$b=t_n$
t

Теория кривых

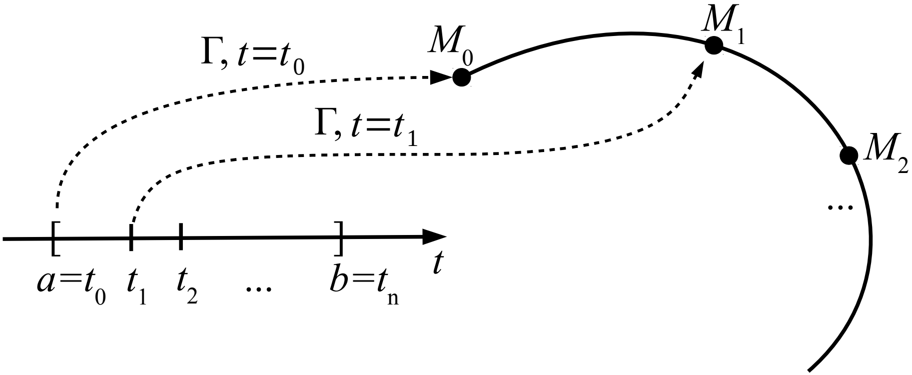


Теория кривых

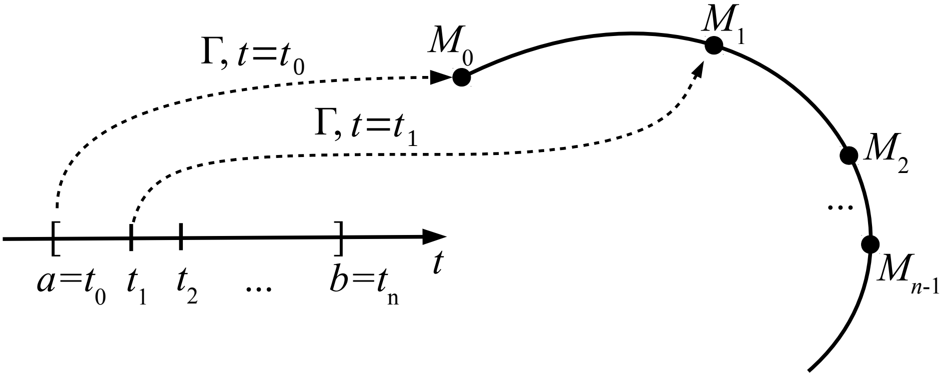


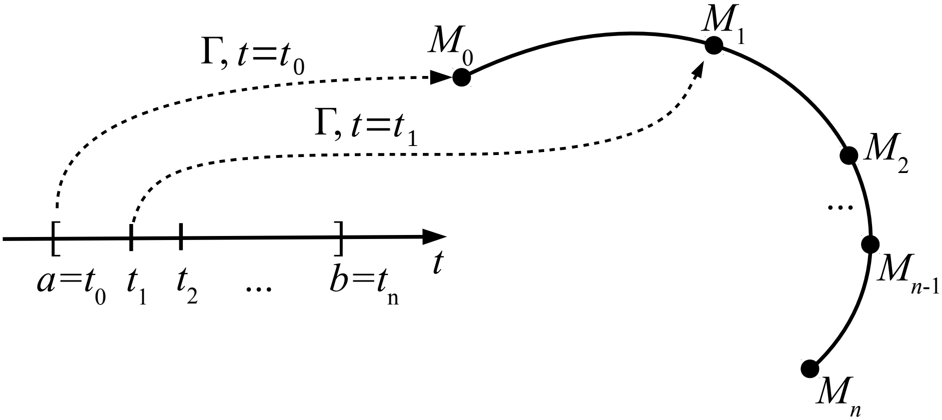

Γ, t=t0
M0
M1
Γ, t=t1
M2
a=t0 t1 t2 ... b=tn
t

Теория кривых

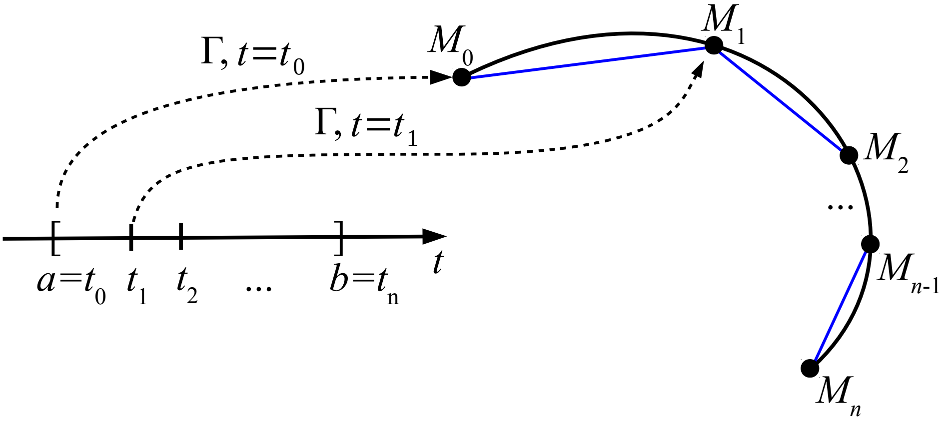


Теория кривых

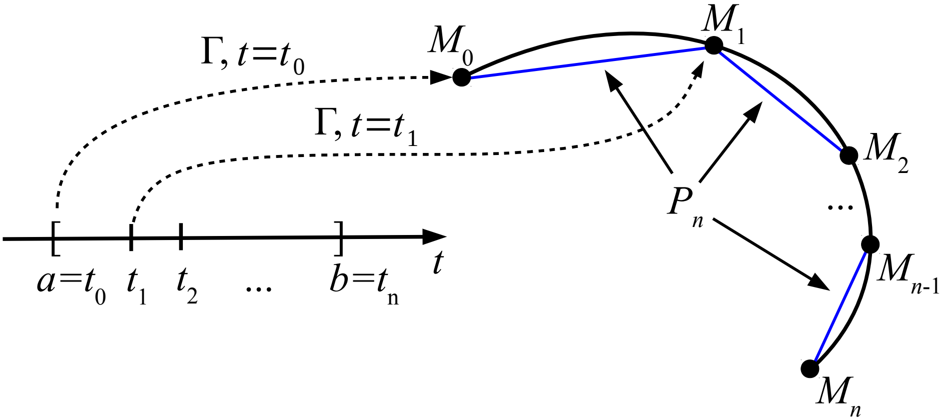




$\Gamma, t=t_0$
$\Gamma, t=t_1$
M_0
M_1
M_2
...
$M_{n\text{-}1}$
M_n
$a=t_0$
t_1
t_2
...
$b=t_n$
t



$\Gamma, t=t_0$
$\Gamma, t=t_1$
M_0
M_1
M_2
...
$M_{n\text{-}1}$
M_n
$a=t_0$
t_1
t_2
...
$b=t_n$
t


$\Gamma, t=t_0$
$\Gamma, t=t_1$
M_0
M_1
M_2
...
$M_{n\text{-}1}$
M_n
P_n
$a=t_0$
t_1
t_2
...
$b=t_n$
t

Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\overline{r}(t_k) - \overline{r}(t_{k-1})|$.

Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\overline{r}(t_k)-\overline{r}(t_{k-1})|$. Следовательно, длина σ_n всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|\overline{r}(t_k)-\overline{r}(t_{k-1})|.$$

Определение

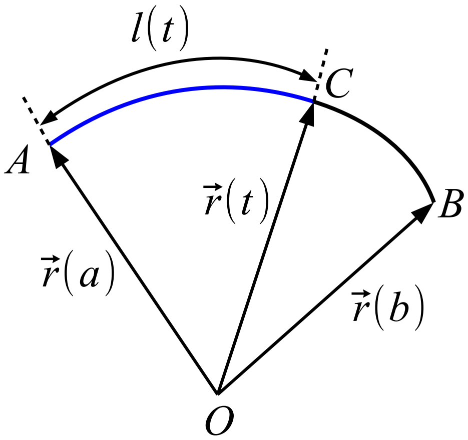
Длиной кривой Γ называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных P_n, т.е.

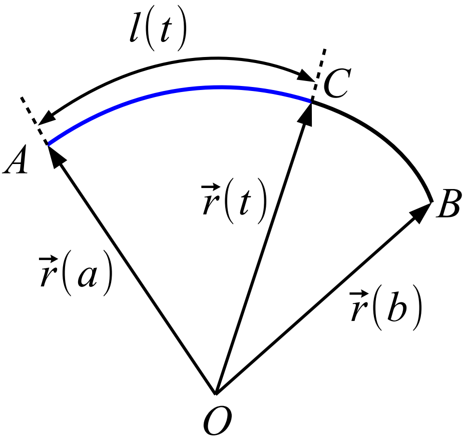
$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$

Определение

Если функция $\overline{r}'(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ называется **непрерывно дифференцируемой**.

Теорема (о переменной длине дуги)
Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги l, отсчитываемая от начала $\overline{r}(a)$ кривой Γ, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной t.
При этом
$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|.$$


$l(t)$
C
A
$\vec{r}(t)$
B
$\vec{r}(a)$
$\vec{r}(b)$
O



$l(t)$ - длина участка AC кривой AB.

Рассмотрим плоскую кривую

$$\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}.$$

Рассмотрим плоскую кривую

$$\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}.$$

Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Теория кривых

Рассмотрим плоскую кривую

$$\Gamma = \{x(t), y(t) | a \le t \le b\}.$$

Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\Downarrow$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Рассмотрим плоскую кривую

$$\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}.$$

Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\Downarrow$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

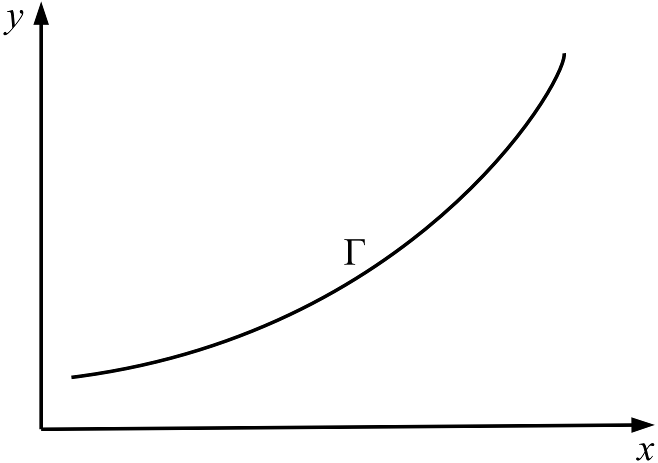
$$\Downarrow$$

$$(dl)^2 = (x' dt)^2 + (y' dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

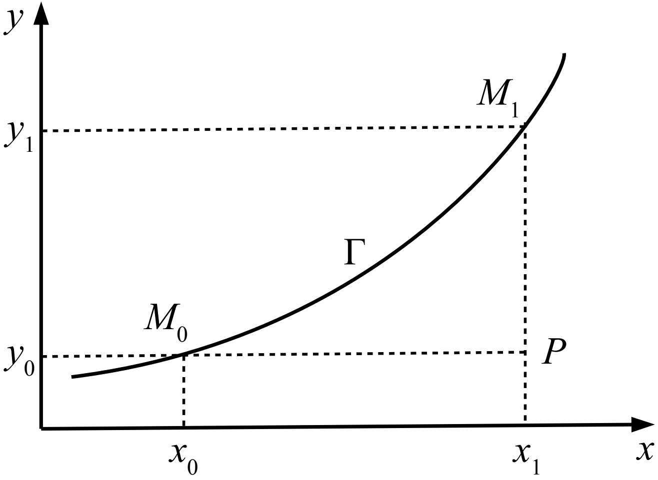
Рассмотрим плоскую кривую
$$\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}.$$
Тогда
$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$
$$\Downarrow$$
$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$
$$\Downarrow$$
$$(dl)^2 = (x' dt)^2 + (y' dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$
dl - дифференциал длины дуги $l = l(t)$.

Геометрический смысл дифференциала dl*:*

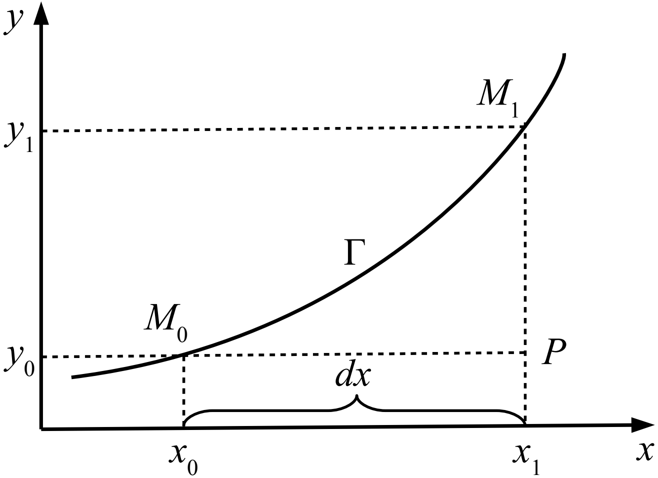
Геометрический смысл дифференциала **dl***:*



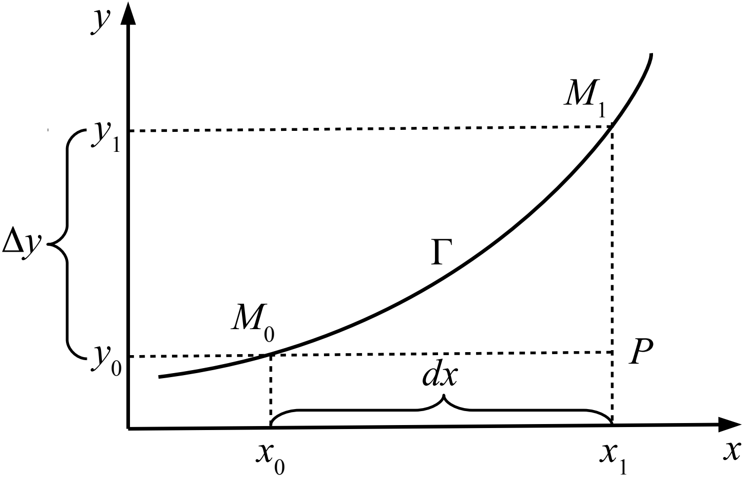
Геометрический смысл дифференциала **dl***:*



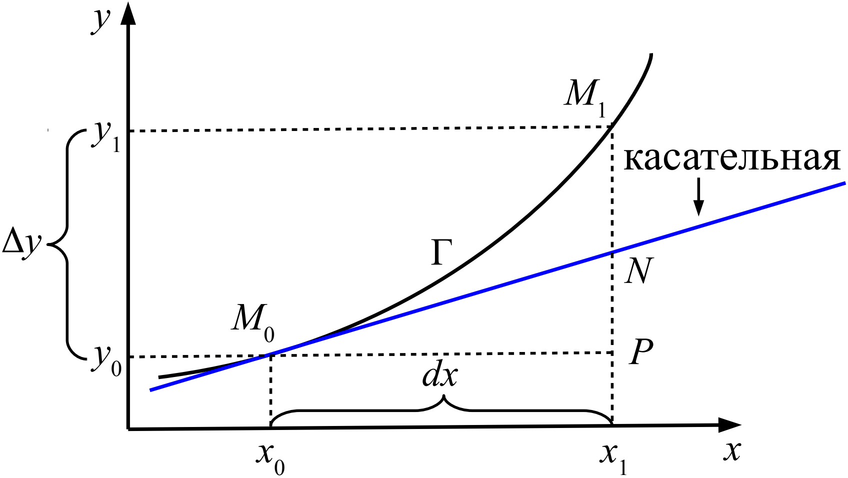
Геометрический смысл дифференциала **dl**:



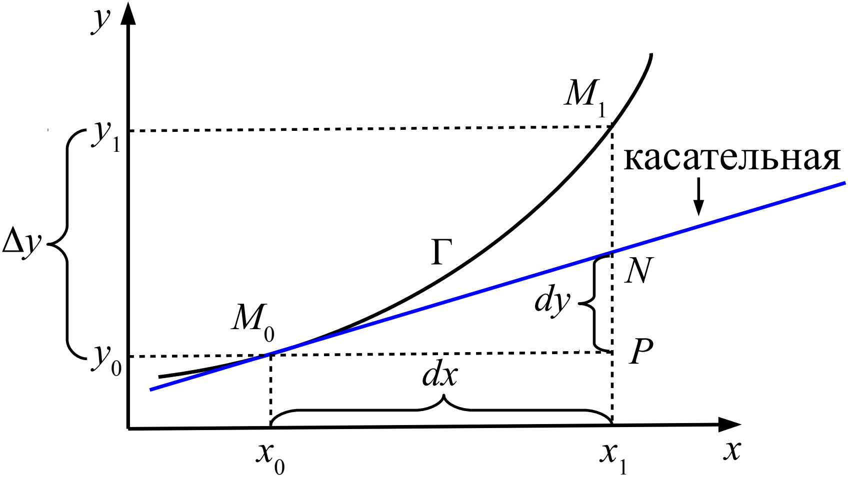
Геометрический смысл дифференциала **dl**:



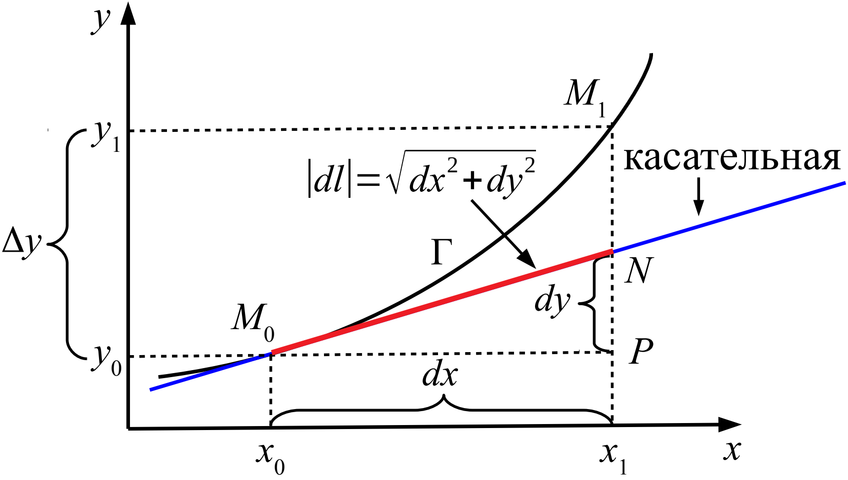
Геометрический смысл дифференциала dl:



Геометрический смысл дифференциала **dl**:



Геометрический смысл дифференциала **dl**:



Теория кривых

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Тогда

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$.
Тогда
$M_0P = dx = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1.

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$.
Тогда
$M_0P = dx = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1.
$PM_1 = \Delta y = y_1 - y_0$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента dx.

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то
$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2$

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то
$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$

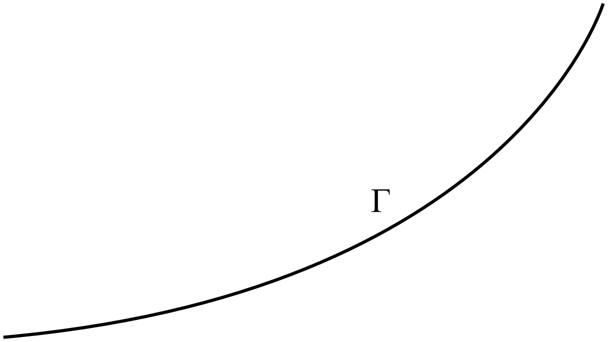
$$\Downarrow$$

$$|dl| = M_0N.$$

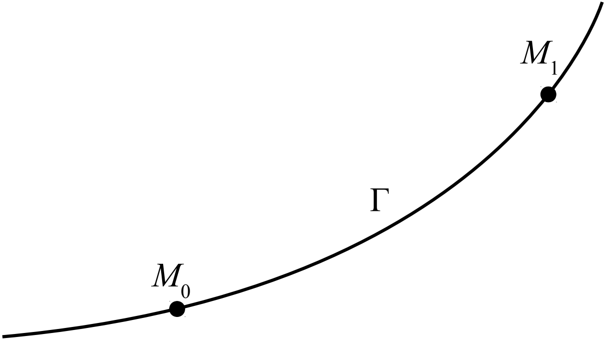
Отсюда получаем, что дифференциал длины дуги dl по абсолютной величине равен длине участка касательной, заключенного между точками x_0 и x_1.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

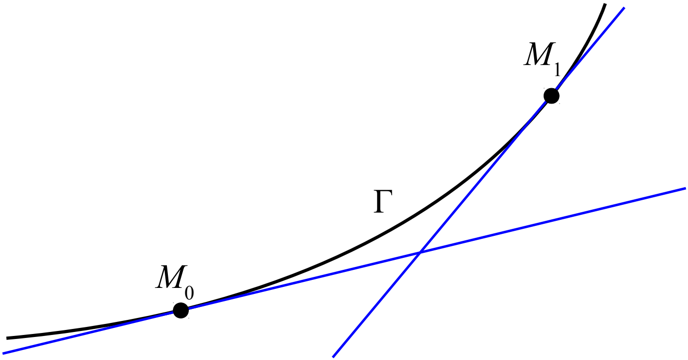
Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



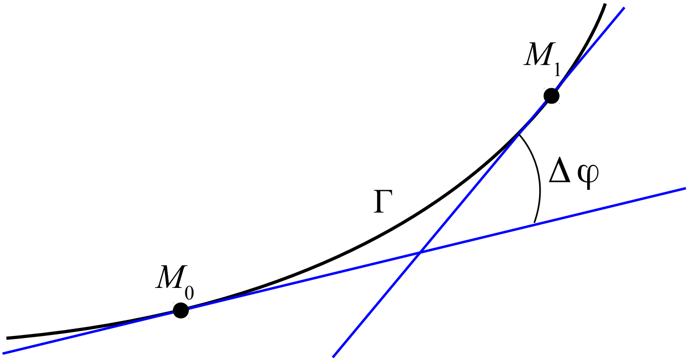
Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1. Проведем через эти точки касательные.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1. Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки M_0 к точке M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Отношение угла $\Delta\varphi$ к длине Δl дуги, заключенной между точками M_0 и M_1, называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Определение

Отношение угла $\Delta\varphi$ к длине Δl дуги, заключенной между точками M_0 и M_1, называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

K_{sr} характерезует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше K_{sr}, тем ближе кривая к прямой.

Определение

Кривизной кривой Γ в точке M_0 называется предел

$$K = \lim_{M_1 \to M_0} K_{sr}.$$

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Определение

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение: R

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

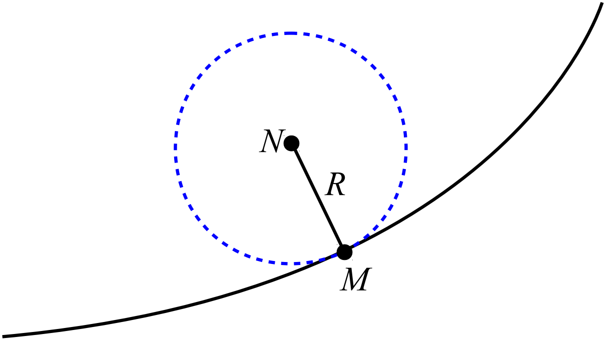
Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение: $R = \dfrac{1}{K}$.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Проведем к кривой Γ в точке M нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MN с длиной, равной R.

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



Определение

Точка N называется **центром кривизны**, а окружность с центром в точке N и радиусом R - **окружностью кривизны** плоской кривой в точке M.