Математический анализ
Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 2.3

Аннотация

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Порядок роста функции.

1 Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)**

Если функция определена в некоторой окрестности точки c, принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и имеет в ней конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда $\forall x \in U(c)\ f(x) \leq f(c)$. Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to c$, получим

$$\begin{matrix} (1) \Rightarrow f'(c) \geq 0 \\ (2) \Rightarrow f'(c) \leq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow f'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

2 Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Ролля)**

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) имеет на интервале (a, b) конечную или определенного знака бесконечную производную,

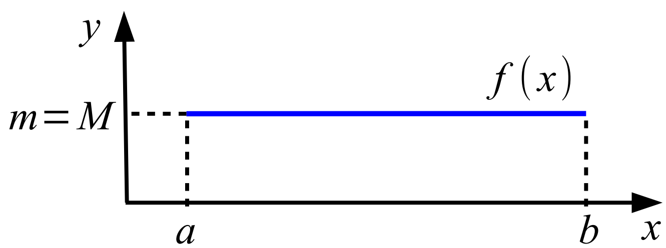
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство

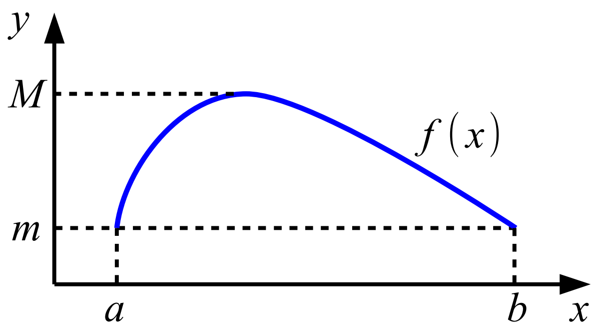
Поскольку $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке. Возможны случаи:

1) $m = M$



Тогда $f(x) = const \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

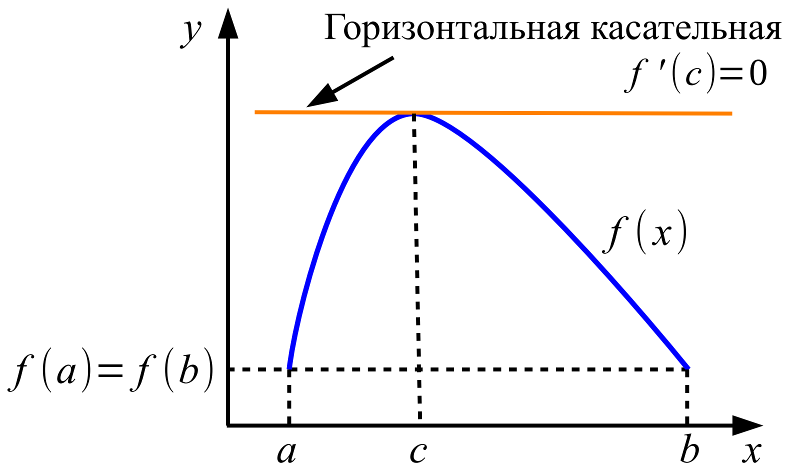
2) $m \neq M$



Так как $f(a) = f(b)$, то m или M достигаются на интервале (a, b). Пусть M достигается на (a, b), т.е. $M = f(c), c \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ■

Геометрическая интерпретация теоремы

Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале (a, b) существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.



*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$

$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a},$

$F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$
$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}.$ ■

Теорема (теорема Коши)
Пусть функции f и g
1) непрерывны на отрезке $[a, b]$,
2) имеют производные в каждой точке интервала (a, b),
3) $g' \neq 0$ во всех точках интервала (a, b).
Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3 Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.

Рассмотрим частный случай раскрытия неопределенности

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

*Теорема (правило Лопиталя)**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$
1) непрерывны и дифференцируемы на интервале (a, b),
2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$,
3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$,
4) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.
Тогда

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a.

$\Rightarrow$ $f(x)$ и $g(x)$ начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$.

$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$. (1)

Так как $a < c < x$, то $\lim\limits_{x \to a+0} c = a$.

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:

$K = \lim\limits_{c \to a+0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$.

$\Rightarrow$ по равенству (1) $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K$.

По условию 4 теоремы $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ■

Общий случай:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где a - это конечное число или одна из бесконечностей.

4 Порядок роста функций

Определение

Говорят, что бесконечно большая при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при

$x \to a$ функция $g(x)$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{1/x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} nx^n = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^x)'}{(x^n)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^x \ln a)'}{(nx^{n-1})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x \ln^n a}{n!} = +\infty,\ a > 1$

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.