Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Таблица производных

Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$

Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Таблица производных

7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$

Таблица производных

7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Таблица производных

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Таблица производных

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$\Delta f =$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$y' =$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

1) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

$$= \cos x. \blacksquare$$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$y' =$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

Таблица производных

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} =$$

Вывод ряда формул:

2) $y = a^x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} =$$

$$= a^x \ln a. \blacksquare$$

Производные высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x)$

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x)$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два способа обозначения производных высших порядков:

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два способа обозначения производных высших порядков:

$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два способа обозначения производных высших порядков:

$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots$

$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), \dots$

Пример:

Пример:
$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

Производные высших порядков

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

$\ldots$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

$\ldots$

$(2^x)^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$

Физический смысл второй производной

Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.

Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.
$V = S'(t)$ - скорость

Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.

$V = S'(t)$ - скорость

$a = V'(t) = S''(t)$ - ускорение

Дифференциал функции

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.
Обозначение: $df(x_0)$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$.

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx.

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) =$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.}$$

Дифференциал функции

Пример:

Пример:
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

Пример:

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

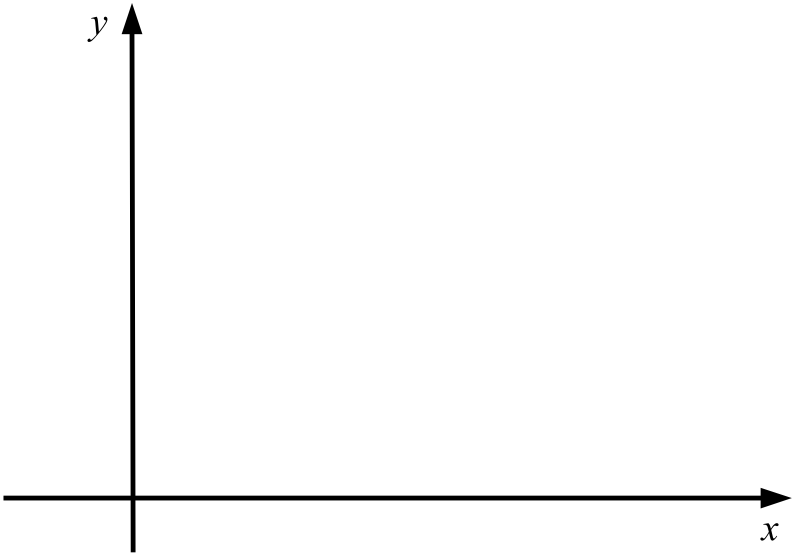
$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$

Дифференциал функции

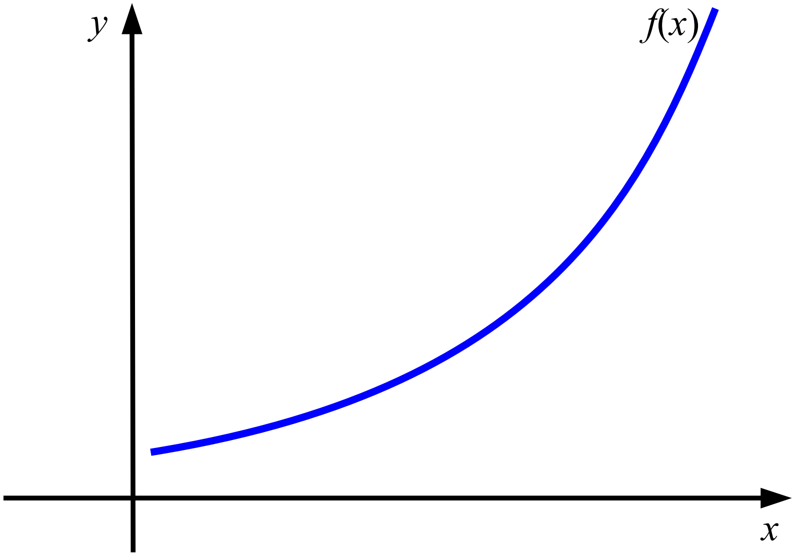
Пример:
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$
$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$
$\Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

Геометрический смысл дифференциала

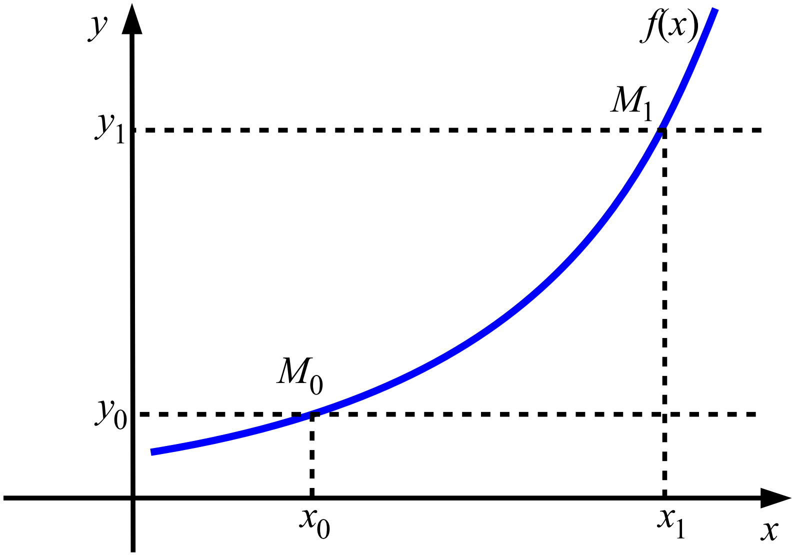
Геометрический смысл дифференциала



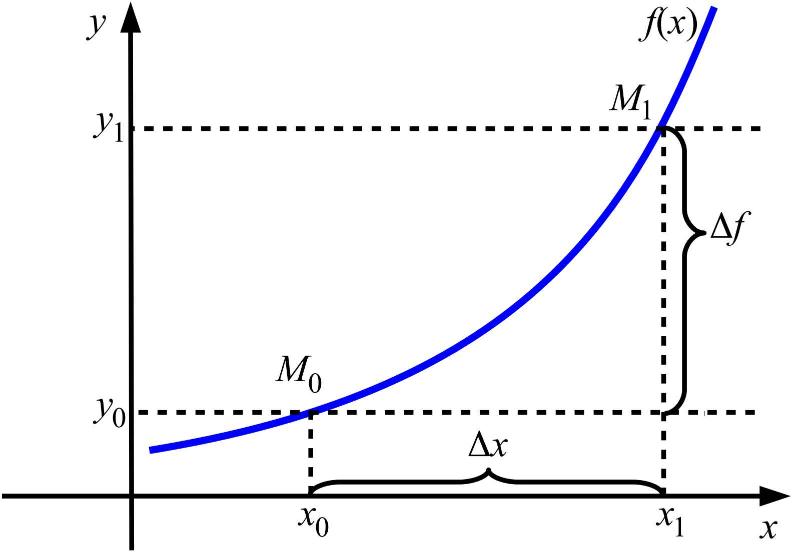
Геометрический смысл дифференциала



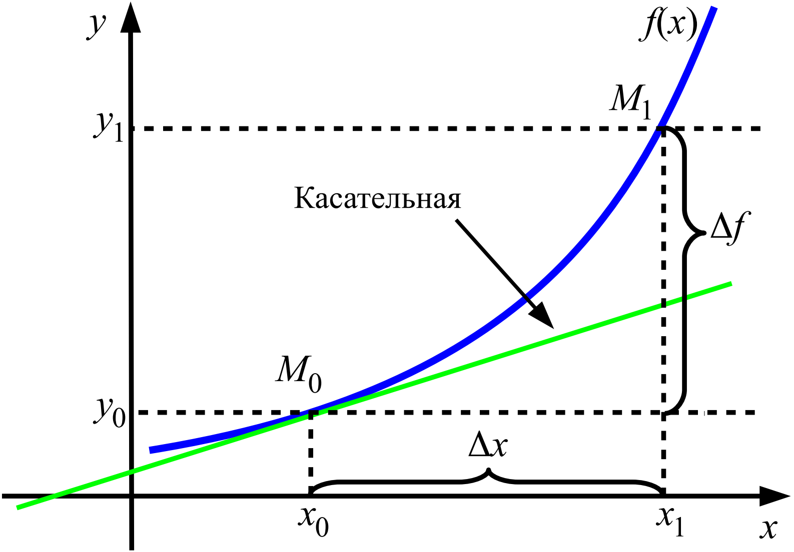
Геометрический смысл дифференциала



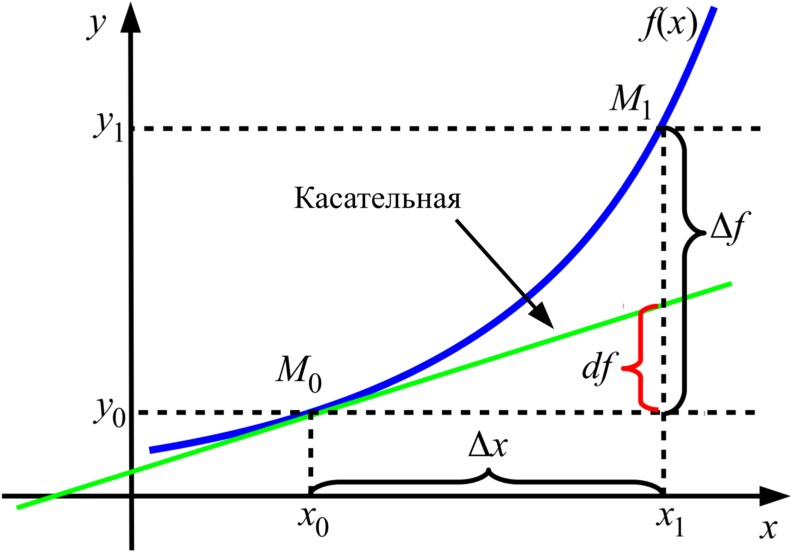
Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx.

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

то, чем меньше приращение аргумента Δx, тем ближе значение дифференциала к значению приращения функции.

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

$\Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

$\Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$

Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$

Правила вычисления дифференциала

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$

2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$

2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$

Инвариантность формы дифференциала

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$u_0 = u(x_0)$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx$$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx = v'(u_0)du$$

Инвариантность формы дифференциала

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2 f(x_0)$

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0))$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Определение

Дифференциалом n**-ого порядка** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:

$d^n f(x_0)$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:

$d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0))$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:

$d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0)) = f^{(n)}(x_0) dx^n$