Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная в экстремальных точках

Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)**

Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)**

Если функция определена в некоторой окрестности точки c, принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и имеет в ней конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

Производная в экстремальных точках

Доказательство

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение.

Тогда $\forall x \in U(c)\ f(x) \leq f(c)$.

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to c$, получим

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to c$, получим

$(1) \Rightarrow f'(c) \geq 0$

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to c$, получим

$(1) \Rightarrow f'(c) \geq 0$

$(2) \Rightarrow f'(c) \leq 0$

Производная в экстремальных точках

Соответственно,

если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$

если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to c$, получим

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow f'(c) \geq 0 \\ (2) \Rightarrow f'(c) \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Ролля)**

*Теорема (теорема Ролля)**

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) имеет на интервале (a, b) конечную или определенного знака бесконечную производную,

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство

Доказательство

Поскольку $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке.

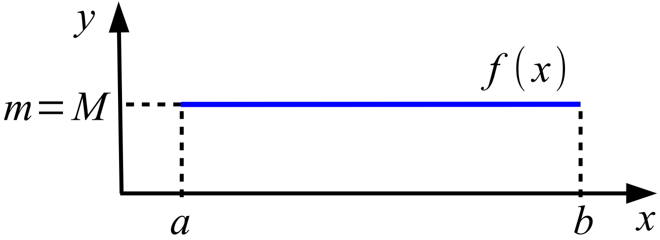
Возможны случаи:

Возможны случаи:

1) $m = M$

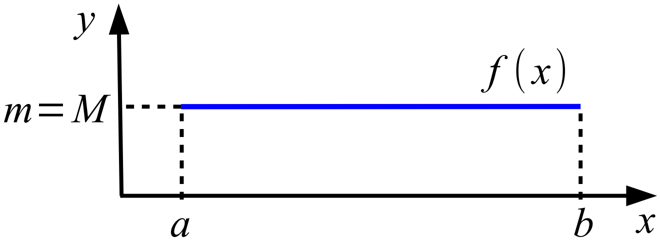
Возможны случаи:

1) $m = M$



Возможны случаи:

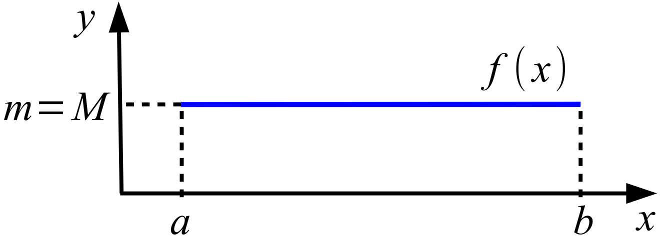
1) $m = M$



Тогда $f(x) = const$

Возможны случаи:

1) $m = M$



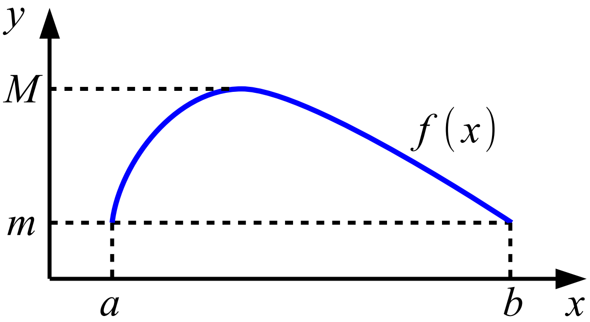
Тогда $f(x) = const \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

Возможны случаи:

2) $m \neq M$

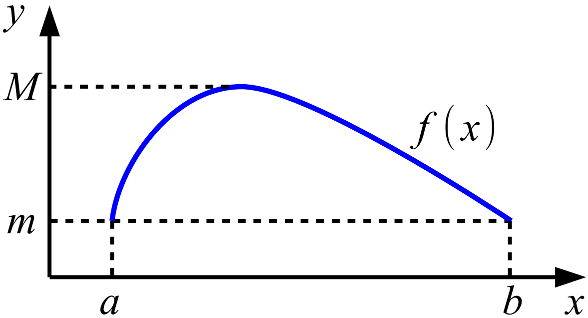
Возможны случаи:

2) $m \neq M$



Возможны случаи:

2) $m \neq M$



Так как $f(a) = f(b)$, то m или M достигаются на интервале (a, b).

Теоремы о средних значениях

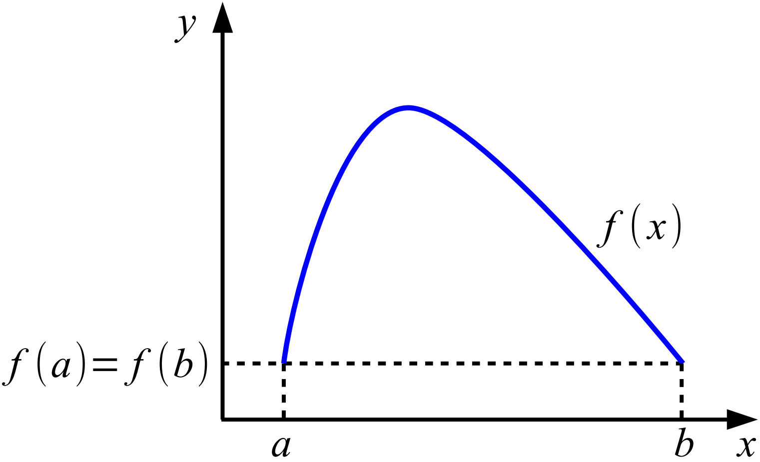
Пусть M достигается на (a, b), т.е. $M = f(c), c \in (a, b)$.

Пусть M достигается на (a, b), т.е. $M = f(c), c \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. $\blacksquare$

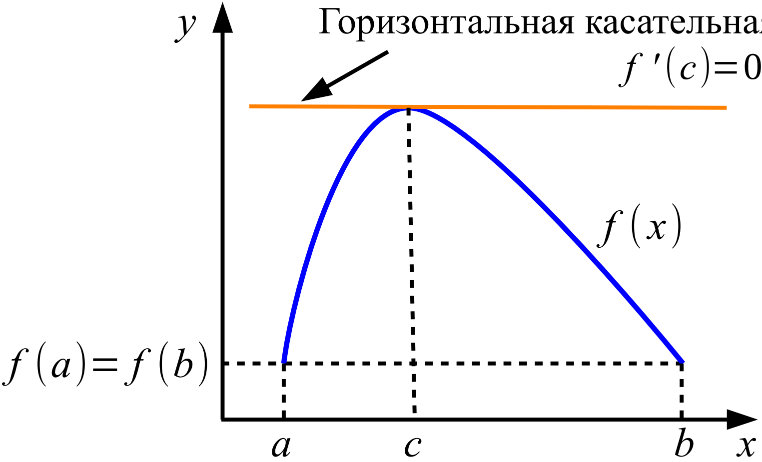
Теоремы о средних значениях

Геометрическая интерпретация теоремы:

Геометрическая интерпретация теоремы:



Геометрическая интерпретация теоремы:



Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале (a, b) существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.

*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)**

*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Доказательство

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$

Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Теорема (теорема Коши)

Теорема (теорема Коши)

Пусть функции f и g

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$,

2) имеют производные в каждой точке интервала (a, b),

3) $g' \neq 0$ во всех точках интервала (a, b).

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные. Рассмотрим частный случай раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

Правило Лопиталя

*Теорема (правило Лопиталя)**

Правило Лопиталя

*Теорема (правило Лопиталя)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1) непрерывны и дифференцируемы на интервале (a, b),

2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$,

3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$,

4) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Правило Лопиталя

Доказательство

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$.

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a.

Правило Лопиталя

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a.

$\Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$.

Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} =$$

Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \\ = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \\ = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как $a < c < x$, то $\lim\limits_{x \to a+0} c = a$.

Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \\ = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как $a < c < x$, то $\lim\limits_{x \to a+0} c = a$.

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:

Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \\ = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как $a < c < x$, то $\lim\limits_{x \to a+0} c = a$.

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$K = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Правило Лопиталя

$\Rightarrow$ по равенству (1)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K.$$

$\Rightarrow$ по равенству (1)

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=K.$$

По условию 4 теоремы $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K.$

Правило Лопиталя

$\Rightarrow$ по равенству (1)

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=K.$$

По условию 4 теоремы $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K.$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \blacksquare$$

Правило Лопиталя

Общий случай:

Общий случай:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где a - это конечное число или одна из бесконечностей.

Порядок роста функций

Определение

Говорят, что бесконечно большая при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при $x \to a$ функция $g(x)$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Порядок роста функций

Примеры:

Порядок роста функций

Примеры:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x}$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(\ln x)'}$$

Порядок роста функций

Примеры:

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x}$$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}nx^n$$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}nx^n=+\infty$$

Порядок роста функций

Примеры:

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^n}$

Примеры:

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Порядок роста функций

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}$$

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}$$

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Примеры:

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}$$

Порядок роста функций

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}$$

Порядок роста функций

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots$$

Примеры:

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}$$

Примеры:

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x\ln a)'}{(nx^{n-1})'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}=+\infty,\ a>1$$

Порядок роста функций

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.

Порядок роста функций